Anais da

XXXIV Semana Acadêmica da Matemática 2020

unioeste
Universidade Estadual do Oeste do Paraná

Anais da

XXXIV Semana Acadêmica da Matemática

08/09/2020 a 17/09/2020

Realização

Curso de Matemática

Apoio

CCET

Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas

Comissão organizadora da XXXIV Semana Acadêmica da Matemática:

Fabiana Magda Garcia Papani (Coordenadora)
Amarildo de Vicente
Andréia Büttner Ciani
Arleni Elise Sella Langer
Clezio Aparecido Braga
Dulcyene Maria Ribeiro
Fernanda Guerra
Laura Massuda Crema
Pâmela Gonçalves

Comitê científico:

Amarildo de Vicente
Andréia Büttner Ciani
Arleni Elise Sella Langer
Clezio Aparecido Braga
Daniela Maria Grande Vicente
Dulcyene Maria Ribeiro
Pamela Gonçalves
Pedro Pablo Durand Lazo
Sandro Marcos Guzzo
Simone Aparecida Miloca

Arte da Capa:

Clezio Aparecido Braga

Diagramação:

Clezio Aparecido Braga

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

Semana Acadêmica de Matemática (34.: 2020: Cascavel – PR)
S471a Anais da XXXIV Semana Acadêmica de Matemática / Fabiana Magda Garcia Papani (Coordenadora). --- Cascavel (PR): UNIOESTE, 2020.
54 p.

ISSN 2526-0804
Vários autores
Somente na versão eletrônica

1. Matemática-Estudo e Ensino. 2. Ensino superior - Evento. I. Papani, Fabina Magda Garcia (Coord.). II.Universidade Estadual do Oeste do Paraná. III. Título.

CDD 20.ed. 510.0711

Rosângela A. A. Silva – CRB 9ª/1810

Apresentação

A Semana Acadêmica da Matemática está na sua XXXIV edição. Este é o evento de extensão mais tradicional promovido pelo Curso de Matemática, da UNIOESTE campus de Cascavel. É um evento com periodicidade anual.

Na programação da XXXIV Semana Acadêmica de Matemática figuram palestras, minicursos e comunicações orais. As comunicações orais resultam da inscrição dos participantes na modalidade de apresentadores de trabalhos.

Nesta edição da Semana Acadêmica de Matemática, 6 trabalhos foram inscritos e aceitos para apresentação oral e publicação nos anais do evento. São em geral trabalhos resultados das pesquisas de Iniciação Científica e de Monografia desenvolvidos por alunos do curso de Matemática. Registramos também trabalhos realizados por professores do Curso de Matemática da UNIOESTE - Cascavel, e de alunos de outros cursos que desenvolveram suas pesquisas com teor matemático. A apresentação destes trabalhos no evento tem o objetivo de compartilhar os conhecimentos adquiridos pelos alunos e professores nos seus respectivos projetos. O registro destes trabalhos servirá para que os futuros alunos possam também fazer uso deste conhecimento.

A comissão organizadora agradece aos autores pelo envio dos trabalhos e também à comissão científica pelas contribuições dadas durante o processo de avaliação e correção dos trabalhos.

A comissão organizadora.

Cascavel, Setembro de 2020.

Índice de Trabalhos

Estudo do desempenho de alguns métodos de otimização para funções de uma única variável

Felipe Wasmann Rattova
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - UNIOESTE
lipewasmann@gmail.com

Amarildo de Vicente
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - UNIOESTE
amarildo.vicente@gmail.com

Resumo: O trabalho faz uma abordagem sobre os métodos de otimização unidirecionais Bisseção, Dicotomia, Seção Áurea e Fibonacci, a fim de avaliar seus desempenhos. Para isso foram feitas as implementações dos algoritmos respectivos na linguagem C++ e as aplicações dos programas produzidos a um conjunto de funções idealizadas. O estudo desse tema se justifica em função da aplicabilidade que ele possui em algoritmos destinados a resolver problemas de otimização não lineares multivariados, que é bastante importante em diversas áreas da Ciência. Para cada método estudado foi avaliado o tempo médio de processamento do algoritmo e a precisão das respostas fornecidas. Os resultados mostraram que o método de Fibonacci foi o mais eficiente nos testes realizados.

Palavras-chave: Minimização; Métodos de otimização; Otimização unidirecional.

1 Introdução

A teoria de otimização é de extrema importância na área da matemática por estar conectada a diversas áreas do conhecimento. Especialmente no setor produtivo, com um mercado extremamente competitivo, as empresas necessitam de formas cada vez mais eficientes no gerenciamento da produção e do comércio, a fim de obter êxito nos negócios; a construção de escolas, de hospitais para pronto atendimento, de serviços de primeiros socorros, entre outros, requerem um estudo sobre sua localização, a fim de que atendam a população da melhor forma possível. Estas são algumas das situações em que o uso da teoria de otimização pode dar uma grande contribuição. É de suma importância que se consiga o melhor proveito possível dos recursos disponíveis para produção de bens e prestação de serviços.

Em relação às características das funções que compõem um problema de otimização, ela pode ser linear ou não linear e, em geral, apresenta muitas variáveis. Em grande parte dos algoritmos destinados a resolver problemas de otimização não lineares multivariados, como o método do gradiente, por exemplo, exige-se o uso de um algoritmo restrito a otimizar funções não lineares de uma única variável. Por esse motivo o trabalho aqui apresentado está focado nesse tipo de função. Serão analisados os algoritmos Seção Áurea, Bisseção, Dicotomia e Fibonacci. No estudo foi feita a implementação de cada um destes algoritmos e um estudo de seu desempenho a partir de testes com funções idealizadas.

2 Embasamento Teórico

De acordo com a forma da função a ser otimizada e das restrições existentes, um modelo de otimização pode ser linear ou não linear, conforme pode ser visto em Luemberger e Ye (2008). O interesse aqui é pela segunda categoria de modelo. De um modo geral os modelos de otimização costumam possuir muitas variáveis. Quando o modelo em questão é não linear e restrito, grande parte dos algoritmos utilizados em sua resolução empregam em sua estrutura métodos que se aplicam a otimização de funções não lineares de uma única variável. Há muitos métodos conhecidos na literatura, mas neste artigo serão estudados os seguintes métodos: Bisseção, Dicotomia, Seção Áurea e Fibonacci. Esses métodos podem ser visto em Bazaraa (2006). A pretensão desse estudo é avaliar o tempo de processamento consumido pelos métodos citados na busca de uma solução e também avaliar a precisão do resultado obtido. Para isso, foram implementados os algoritmos de tais métodos na linguagem C++. Os programas foram aplicados em um conjunto de funções escolhidas para os testes. No presente estudo está sendo tratado o caso em que se deseja obter o ponto de mínimo local de uma função em um determinado intervalo. A fim de que os métodos citados possam ser aplicados, é necessário que a função tratada seja convexa ou quase-convexa. Seguem as definições, que podem ser vistas em Solomon (2015).

Definição 1. O ponto $x_1 \in \mathbb{R}$ é considerado *minimo local* de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se existir algum $\epsilon > 0$ tal que $f(x_1) \leqslant f(x_0)$ para todos $x_0 \in \mathbb{R}$ satisfazendo $\mid x_0 - x_1 \mid < \epsilon$.

Definição 2. Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é considerada *convexa* quando para todos $x, y \in \mathbb{R}$ e $\lambda \in (0, 1)$ o seguinte relacionamento vale $f((1-\lambda)x + \lambda y) \leqslant (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$.
Quando a desigualdade é estrita (substitua $<$ por $\leqslant$), a função é estritamente convexa.

A definição a seguir pode ser encontrada na Wikipédia, Funções convexas (2020).

Definição 3. A função f é quase-convexa em D se, e somente se, para todo $x, y \in D$ e para todo $\lambda \in (0, 1)$ vale $f[\lambda x + (1-\lambda)y] \leqslant max(f(x); f(y))$.

Em outras palavras, o gráfico de uma função convexa têm a concavidade voltada para cima, enquanto o gráfico de uma função quase-convexa pode ter formas mais complexas.

3 Métodos estudados

3.1 Método da Bisseção

Conforme apresentado Milovanovic e Dordevic (2007), o Método da Bisseção é de fácil compreensão teórica e possui um algoritmo bastante simples. Este método costuma ser eficiente quando a derivada da função é fácil de ser obtida algebricamente. Porém, não é tão eficiente quando a derivada precisa ser aproximada por processos numéricos, em virtude dos erros de arredondamento ocorridos durante o processamento.

Funcionamento do Método

Seja f uma função quase-convexa no intervalo $[a, b]$. A ideia do método é tomar o ponto médio Pm deste intervalo e avaliar a derivada neste ponto. Após isso, teremos três possíveis resultados:

Se $f'(Pm) = 0$ então Pm é o ponto de mínimo do intervalo indicado.

Se $f'(Pm) < 0$ então a inclinação da reta tangente no ponto $(Pm, f(Pm))$ é negativa, de modo que a função é decrescente no intervalo $[a, Pm]$. Neste caso o ponto de mínimo da função está à direita de Pm. Logo, o novo intervalo de busca será $[Pm, b]$.

Se $f'(Pm) > 0$ conclui-se que a inclinação da reta tangente no ponto $(Pm, f(Pm))$ é positiva, indicando que a função é crescente no intervalo $[a, Pm]$. Assim o ponto de mínimo da função está à esquerda de Pm. Desta forma o novo intervalo de busca será $[a, Pm]$. A ideia exposta está ilustrada na Figura 1.

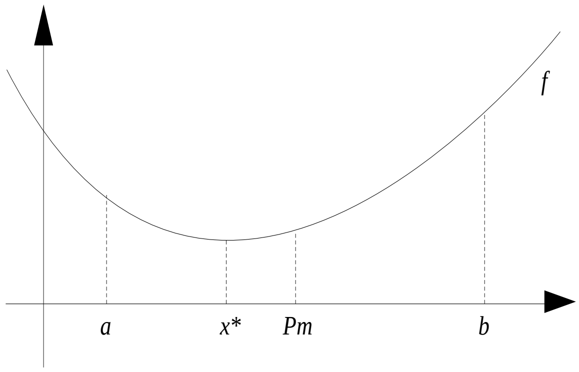

Figura 1: Exemplo gráfico do Método da Bisseção

Algoritmo

Dados de entrada: intervalo $[a, b]$ contendo o ponto de mínimo x^* e precisão ϵ.
Etapa principal:

1. Calcule $erro = b - a$ e $x = (a + b)/2$. Se $erro \leqslant \epsilon$, pare, o ponto de mínimo será definido por $x^* = x$. Caso contrário, calcule $f'(x)$ e siga para o passo 2;
2. Se $f'(x) = 0$ pare e tome como ponto de mínimo $x^* = x$. Caso contrário, siga para o passo 3;
3. Se $f'(x) < 0$ então faça $a = x$. Caso contrário, faça $b = x$. Após isso, retorne ao passo 1;

3.2 Dicotomia

Conforme Bazaraa (2006), o Método da Dicotomia é um método simples que, ao contrário do método Bisseção, não necessita da derivada da função. Uma possível vantagem em relação ao método anterior é que o fato de não necessitar do cálculo de derivadas pode reduzir erros gerados por arredondamentos. Porém, em comparação com o método da Bisseção, pode ter um tempo de processamento maior, por conta de haver mais cálculos. Ele avalia a função duas vezes a cada passo, diferentemente do método anterior que avalia a função derivada apenas uma única vez a cada interação.

Funcionamento do Método

Seja f uma função quase-convexa no intervalo $[a, b]$. A ideia do método é a de determinar dois pontos r e s dentro do intervalo (a, b), da seguinte forma:

$r = (b - a)\alpha + a$ e $s = (b - a)(1 - \alpha) + a$,

sendo $0 < \alpha < 1$. A fim de elaborar um algoritmo o valor de α será escolhido de modo que se tenha $r < s$, o que exige $\alpha < 0.5$.

Após isso, para encontrar o ponto de mínimo no intervalo serão calculadas as imagens de r e s, que então terão dois possíveis resultados:

Se $f(r) > f(s)$ então o ponto de mínimo x^* está à direita de r, de modo que o novo intervalo de busca será $[r, b]$.

Se $f(r) \leqslant f(s)$ então o ponto de mínimo x^* está à esquerda de s, ou é o próprio s, de forma que o novo intervalo de busca será $[a, s]$, ver Figura 2.

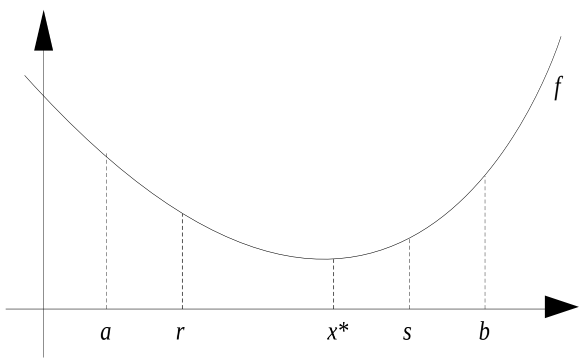

Figura 2: Exemplo gráfico do Método da Dicotomia

Algoritmo

Dados de entrada: intervalo $[a, b]$ contendo o ponto de mínimo x^*, precisão ϵ e um fator de redução α para determinar os pontos r e s dentro do intervalo de busca.

Etapa principal:

1. Calcule $erro = b - a$ e $x = (a + b)/2$. Se $erro \leqslant \epsilon$ pare e tome como ponto de mínimo $x^* = x$. Caso contrário, calcule os valores a seguir e siga para o passo 2:
   $r = (b - a)(1 - \alpha) + a$,
   $s = (b - a)\alpha + a$;

2. Se $f(r) > f(s)$ então tome $a = r$. Caso contrário, defina $b = s$ e em seguida retorne ao passo 1.

3.3 Método da Seção Áurea

Seguindo o raciocínio apresentado em Chong e Zak (2001), o Método da Seção Áurea possui um algoritmo bastante simples. Este método não necessita do uso de derivadas e é bastante similar ao Método da Dicotomia, porém, seu grande diferencial é que, exceto no primeiro passo, onde a função é avaliada duas vezes, nos demais ela é avaliada uma única vez. Isso faz com que o tempo de processamento do método da Seção Áurea seja menor do que o tempo gasto no método da Dicotomia. A fim de que esta condição de avaliar a função uma única vez seja atendida, o algoritmo é construído de modo que, em um passo k, o valor de r ou o valor de s coincida com o valor de r ou de s do passo anterior. Esta construção pode ser vista em Bazaraa (2006) e o fator de redução do intervalo é dado por $\alpha = 0.618$.

Funcionamento do Método

Seja f uma função quase-convexa no intervalo $[a, b]$. A ideia do método é a de determinar dois pontos r e s dentro do intervalo (a, b), da seguinte forma:
$r = (b - a)\alpha + a$ e
$s = (b - a)(1 - \alpha) + a$.

Após isso, assim como no Método da Dicotomia, para que se encontre o ponto de mínimo no intervalo, calculam-se as imagens de r e s, que terão dois possíveis resultados:

Se $f(r) > f(s)$ então o ponto de mínimo está à direita de r, de modo que o novo intervalo de busca será $[r, b]$.

Se $f(r) \leqslant f(s)$ então o ponto de mínimo está à esquerda de s, ou é o próprio s, de forma que o novo intervalo de busca será $[a, s]$. A Figura 3 ilustra as duas possibilidades.

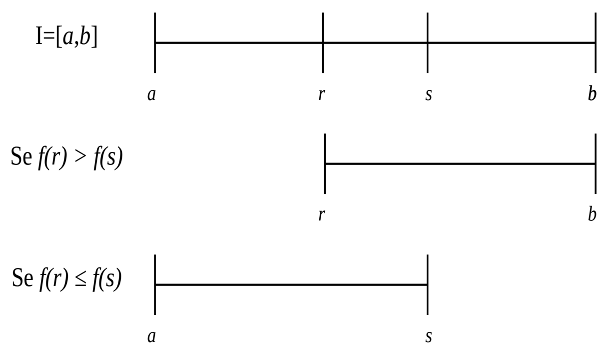

Figura 3: Exemplo de intervalo do Método da Seção Áurea

Algoritmo

Dados de entrada: intervalo $[a, b]$ contendo o ponto de mínimo x^*, precisão ϵ e $\alpha = 0.618$.

Etapa principal:

1. Calcule: $erro = b - a$, $x = (a + b)/2$. Se $erro \leqslant \epsilon$, pare, o ponto de mínimo está definido pelo valor de x. Caso contrário, calcule os valores a seguir e siga para o passo 2:
   $r = (b - a)(1 - \alpha) + a$,
   $s = (b - a)\alpha + a$;
2. Se $f(r) > f(s)$ então aceite as igualdades
   $a = r$,
   $r = s$,
   $s = \alpha(b - a) + a$.
   Caso contrário faça
   $b = s$,
   $s = r$,
   $r = (b - a)(1 - \alpha) + a$,
   $f(s) = f(r)$ e
   recalcule $f(r)$.
   Em seguida retorne ao passo 1.

3.4 Método de Fibonacci

De Chong e Zak (2001), o Método de Fibonacci possui um algoritmo mais complexo que os demais métodos. Ele é similar ao Método da Seção Áurea pois avalia a função apenas uma vez a cada passo, exceto no primeiro, em que a função é avaliada duas vezes. A principal diferença para do método anterior é que a redução no intervalo de busca varia de um passo para outro. O método usa a sequência de Fibonacci para obter o fator de redução do intervalo de busca e, em grande parte das vezes, traz resultados com maior precisão em relação aos outros métodos anteriores.

Funcionamento do Método

Seja f uma função quase-convexa no intervalo $[a, b]$. A ideia do método é a de determinar dois pontos r e s dentro do intervalo (a, b), da seguinte forma:
$r = (b - a)(F[n - 2]/F[n]) + a$ e
$s = (b - a)(F[n - 1]/F[n]) + a$,
sendo $F[0] = 1$, $F[1] = 1$ e $F[n + 1] = F[n] + F[n - 1]$ $\forall n \in N$.

Após isso, para achar o ponto de mínimo no intervalo, analogamente ao Método da Seção Áurea, calculam-se as imagens dos valores r e s, que terão dois possíveis resultados:

Se $f(r) > f(s)$ então o ponto de mínimo está à direita de r_0, de forma que o novo intervalo de busca será $[r_0, b]$. A partir disso será feita uma nova avaliação no intervalo, sendo
$r_1 = s_0$ e
$s_1 = (b - a)(F[n - 2]/F[n - 1]) + a$.

Se $f(r) \leqslant f(s)$ então o ponto de mínimo está à esquerda de s, ou é o próprio s, de maneira que o novo intervalo de busca será $[a, s]$. A partir disso será feita uma nova avaliação no intervalo, sendo
$s_1 = r_0$ e
$r_1 = (b - a)(F[n - 3]/F[n - 1]) + a$,
ver Figura 4.

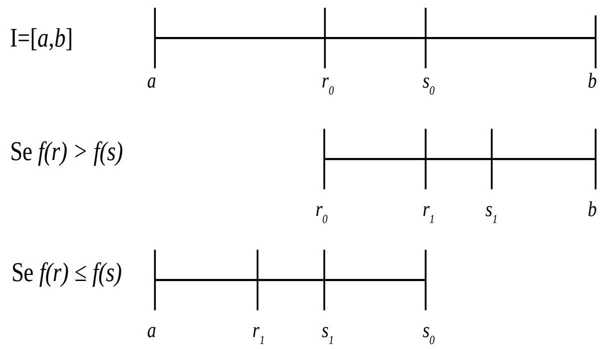

Figura 4: Exemplo de intervalo do Método de Fibonacci

Algoritmo

Dados de entrada: intervalo $[a, b]$ contendo o ponto de mínimo x^*, precisão ϵ, $k = 1$, $F[0] = 1$, $F[1] = 1$, a função $F[n + 1] = F[n] + F[n - 1]$ e um valor n pertencente ao conjunto dos números inteiros positivos.

Etapa principal:

1. Calcule:
   $x = (b + a)/2$,
   $r = (F[n - 2]/F[n])(b - a) + a$,
   $s = (F[n - 1]/F[n])(b - a) + a$.
   Se $k \leqslant erro$, pare e tome como ponto de mínimo $x^* = x$. Caso contrário, siga para o passo 2;
2. Se $f(r) > f(s)$ então aceite as igualdades a seguir e em seguida siga para o passo 3:
   $a = r$,
   $r = s$,
   $f(r) = f(s)$,
   $s = (F[n - k - 1]/F[n - k])(b - a) + a$ e
   recalcule $f(s)$.
   Caso contrário, aceite as igualdades a seguir e siga para o passo 3:
   $b = s$,
   $s = r$,
   $r = (F[n - k - 2]/F[n - k])(b - a) + a$,

$f(s) = f(r)$ e
recalcule $f(r)$.

3. Se $k = n - 2$, então tenha os resultados a seguir:
   $s = r + \epsilon$,
   recalcule $f(s)$
   Após isso, siga para o passo 4;
4. Se $f(r) > f(s)$, então teremos que $a = r$. Caso contrário, teremos a igualdade $b = r$. Calcule $k = k + 1$ e $erro = b - a$. Em seguida, recalcule o valor de x. Após isso, pare e tome como ponto de mínimo $x^* = x$.

4 Comparação entre os Métodos

Após as implementações dos algoritmos apresentados foi feita uma comparação entre os métodos, a fim de avaliar qual deles apresentaria o melhor desempenho. Nessa comparação foram avaliadas as precisões dos resultados e o tempo de processamento de cada um deles. Para realização das comparações foram construídas dez diferentes funções para testes, apresentadas a seguir:

F.1 $f(x) = \operatorname{sen}(e^{\frac{x}{10}}) + 5$
F.2 $f(x) = (\frac{x}{12}) - \operatorname{sen}(\frac{x}{2}) + 2$
F.3 $f(x) = -\operatorname{sen}(\sqrt{x})\frac{x^3}{100} + 3$
F.4 $f(x) = -\operatorname{sen}(\pi^{\frac{x}{10}})\frac{x}{5} + 11$
F.5 $f(x) = \log_{10}(\operatorname{sen}(x^{\frac{3}{x}})) + 7$
F.6 $f(x) = -\ln(\frac{e}{x})\operatorname{sen}(x^{\frac{e}{x}}) + 4$
F.7 $f(x) = \ln(\operatorname{sen}(x^{\frac{e}{x}}))x^2 + 18$
F.8 $f(x) = e^{\frac{x}{2}} - (x^9/10^6) + 7$
F.9 $f(x) = \ln(\frac{x}{e}) - \operatorname{sen}(\ln(x^2)) + 3$
F.10 $f(x) = \operatorname{sen}^2(\pi^{\frac{e}{x^2}})\cos(3\ln(x)) + 2$

A Tabela 1 apresenta o ponto de mínimo teórico aproximado de cada função (PM), o intervalo utilizado para busca, os pontos de mínimo aproximados fornecidos pelos métodos testados e o tempo médio de processamento considerando 50 execuções em cada caso.

Com base nos dados da Tabela 1 foram calculados os erros absolutos entre os pontos de mínimo teóricos e os resultados fornecidos pelos métodos. A definição de erro absoluto é dada a seguir.

Definição 4. Dada a função f quase-convexa e x como um ponto de mínimo local de f no intervalo $[a, b]$, podemos definir o Erro Absoluto sendo a diferença entre o valor de x e um valor p, onde p é o resultado obtido por um dos métodos de otimização para a função f.

A tabela 2 apresenta os valores obtidos em cada caso.

Tabela 1: Comparação entre os Métodos

			Métodos							
Entradas			Bisseção		Dicotomia		Seção Áurea		Fibonacci	
Função	PM	Intervalo	Tempo	PM	Tempo	PM	Tempo	PM	Tempo	PM
F.1	15,50195	[10,20]	112.10^{-8}	15.50293	12.10^{-7}	15.50122	148.10^{-8}	15.50712	104.10^{-8}	15.50110
F.2	3,07554	[0,10]	114.10^{-8}	3.07129	146.10^{-8}	3.07523	152.10^{-8}	3.08441	102.10^{-8}	3.07551
F.3	7,37915	[0,10]	164.10^{-8}	7.37793	142.10^{-8}	7.37873	216.10^{-8}	7.37968	12.10^{-7}	7.37847
F.4	6,59546	[2,12]	88.10^{-8}	7	152.10^{-8}	6.59197	16.10^{-7}	6.59335	13.10^{-7}	6.59207
F.5	2,71828	[2,12]	13.10^{-7}	2.71777	172.10^{-8}	2.71745	138.10^{-8}	2.72365	96.10^{-8}	2.71763
F.6	1,0766	[0,10]	132.10^{-8}	1.07910	148.10^{-8}	1.07651	19.10^{-7}	1.08001	124.10^{-8}	1.07671
F.7	4,51939	[2,12]	154.10^{-8}	4.51465	132.10^{-8}	4.51799	154.10^{-8}	4.52712	134.10^{-8}	4.51823
F.8	-3,20665	[-6,4]	98.10^{-8}	-3.20215	152.10^{-8}	-3.20703	148.10^{-8}	-3.20975	98.10^{-8}	-3.20680
F.9	1,68809	[1,11]	9.10^{-7}	1.68848	146.10^{-8}	1.68813	152.10^{-8}	1.68530	11.10^{-7}	1.68830
F.10	23,10249	[20,30]	108.10^{-8}	23.13965	196.10^{-8}	23.13755	15.10^{-7}	23.14655	122.10^{-8}	23.13762

Tabela 2: Erros absolutos observados

	Métodos			
Funções	Bisseção	Dicotomia	Seção Áurea	Fibonacci
F.1	0.00098	0.00073	0.00517	0.00085
F.2	0.00425	0.00031	0.0087	0.00003
F.3	0.00122	0.00042	0.00053	0.00068
F.4	0.40544	0.00349	0.00211	0.00339
F.5	0.00051	0.00083	0.00537	0.00065
F.6	0.0025	0.00009	0.00341	0.00011
F.7	0.00474	0.0014	0.00773	0.00116
F.8	0.0045	0.00038	0.0031	0.00015
F.9	0.00039	0.00004	0.00279	0.00021
F.10	0.03716	0.03506	0.04406	0.03513

Conclusões

A partir dos estudos realizados na parte teórica de otimização e da análise dos resultados fornecidos pelos testes, tabelas 1 e 2, chegou-se à conclusão de que, entre os métodos citados, o que teve melhor desempenho em relação aos demais foi o Método de Fibonacci, por fornecer uma melhor precisão nos resultados e também um melhor tempo de processamento do algoritmo. Pode-se mostrar algebricamente que, fixado o intervalo inicial de busca e sua amplitude final, esse método requer um menor número de avaliações da função, o que o caracteriza como o mais eficiente. Os resultados obtidos nesse trabalho comprovam esse fato.

Agradecimentos

Agradeço ao professor Amarildo de Vicente por ter me orientado no projeto e por ter me disponibilizado esta grande oportunidade.

Referências

BAZARAA, M. S.; SHERALI, H. D.; SHETTY, C. M. **Nonlinear Programming:** Theory and Algorithms. 3. ed. New Jersey: Wiley-Interscience, John Wiley e Sons Inc., 2006. 853 p.

CHONG, E. K. P; ZAK, S. H.. **An Introduction to Optimization, 2nd Edition**. 2. ed. Canada: Wiley-Interscience, John Wiley e Sons Inc, 2001. 476 p.

FUNÇÕES convexas. In: WIKIPÉDIA a enciclopédia livre. Disponível em: https:pt.wikipedia.org/wiki/Função convexa. Acesso em 10 de agosto de 2020.

MILOVANOVIC, G. V.; DORDEVIC, D. R.. **Numerical Methods In Computational Engineering**. 1. ed. Nis: Grafilm Petkoyi, 2007. 179 p.

SOLOMON, J.. **Numerical Algorithms:** Methods for Computer Vision, Machine Learning and Graphics. 1. ed. Boca Raton: CRC Press, 2015. 379 p.

Séries de Fourier e a equação do calor

Viviane dos Santos Costa[1]
Universidade Estadual do Oeste do Paraná
vivi.costa.2000@gmail.com

Daniela Maria Grande Vicente
Universidade Estadual do Oeste do Paraná
daniela.grande@unioeste.br

Resumo: Neste trabalho será introduzido o problema da equação do calor e sua modelagem matemática, que utiliza o conceito de derivadas parciais e leva ao uso das séries de Fourier. Partindo deste problema, serão citados alguns resultados importantes para o estudo dessas séries, para que, por fim, seja feita a demonstração da validade da solução para o problema da condução do calor em uma barra com extremidades isoladas termicamente.

Palavras-chave: Equações Diferenciais Parciais; Séries de Fourier; Equação do Calor.

1 Introdução

A condução é um dos meios de transferência de calor entre corpos ou meios, do ponto de vista da experiência, a conclusão de que o calor flui da superfície mais quente para a mais fria é perfeitamente compreensível e satisfatória, mas a explicação matemática deste fato exige alguns estudos mais complexos acerca de cada um dos fatores envolvidos, como por exemplo a posição e o tempo, para isso, utiliza-se as equações diferenciais parciais (EDP) para formular uma possível equação que explique o funcionamento desse fenômeno.

No presente trabalho, as EDPs são utilizadas em conjunto com a ferramenta de expansão de funções arbitrárias em séries trigonométricas, estas, que foram estudadas por grandes matemáticos do século XVIII e, posteriormente, utilizadas por Fourier para desenvolver a sua teoria sobre a condução do calor, ficando conhecidas como séries de Fourier. Sobre isso, serão apresentados vários resultados importantes, como a convergência uniforme e pontual, convergência absoluta, continuidade, integrabilidade, diferenciabilidade, desigualdades, além de algumas condições sobre as funções consideradas, para que se encontre uma solução possível para a equação do calor.

A partir dessa solução, será demonstrada a sua validade para um caso específico de uma barra com as extremidades isoladas, utilizando os resultados já apresentados, para provar que, sob as condições iniciais e de fronteira consideradas, a equação apresentada é satisfatória.

[1]Agradecimento ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo auxílio financeiro

2 Modelagem matemática da equação do calor

Inicia-se a abordagem deste problema estudando uma barra de comprimento L, feita de material condutor uniforme, cuja área de secção transversal é A. Mais detalhes sobre a modelagem matemática podem ser encontrados em Boyce e DiPrima (2010). Considera-se que a barra esteja isolada termicamente nas laterais no sentido longitudinal, mas que suas extremidades estão em contato com o meio e podem trocar calor com ele, ou seja, que a transferência de calor seja unidimensional. Se a barra estiver posicionada sobre um eixo X horizontal, pode-se representar a temperatura de uma secção da barra na posição "x" em um determinado tempo "t" pela função $u(x,t)$. Assim, utilizando a Lei do Resfriamento de Fourier, considerando duas seções da barra x e $x+d$, em um mesmo tempo "t", tem-se a seguinte equação para a quantidade de calor transferida:

$$Q = \frac{KA|u(x,t) - u(x+d,t)|}{d} \tag{1}$$

onde $K =$ condutibilidade térmica do material entre as placas.

Tomando o limite quando $d \to 0$ em (1), tem-se que o fluxo de calor na direção $+x$, em uma secção de abcissa x, no tempo t, é dado por:

$$q(x,t) = -KAu_x(x,t). \tag{2}$$

Analisando um elemento da barra entre x_0 e $x_0 + \sigma$, pode-se verificar qual a quantidade de calor Q que ele recebe no tempo entre t_0 e $t_0 + \tau$, utilizando o fluxo de calor $q(x,t)$, escreve-se:

$$q = \int_{t_0}^{t_0+\tau} K[u_x(x_0+\sigma,t) - u_x(x_0,t)]A\ dt. \tag{3}$$

Sabendo ainda que o calor específico (c) de uma substância é a quantidade de calor necessária para aumentar em 1°C a temperatura de uma grama dessa substância, pode-se multiplicar essa constante pela densidade do material (ρ), e encontrar a quantidade de calor recebida em um tempo de t_0 até $t_0 + \tau$ e numa seção da barra de x_0 até $x_0 + \sigma$, como segue:

$$q = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \int_{x_0}^{x_0+\sigma} c\ u_t(x,t)dt\ \rho\ A\ dx. \tag{4}$$

Aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo em (3) e igualando-a a (4), obtém-se:

$$\int_{t_0}^{t_0+\tau} \int_{x_0}^{x_0+\sigma} K\ u_{xx}(x,t)dxdt = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \int_{x_0}^{x_0+\sigma} c\ \rho\ u_t(x,t)dxdt$$

e ainda, considerando a continuidade da função $u(x,t)$ para $t > t_0$, $0 < x_0 < L$, $\tau > 0$ e $\sigma > 0$, tem-se:

$$u_t = \kappa u_{xx} \tag{5}$$

onde $\kappa = \frac{K}{c\rho}$ é chamada de difusibilidade térmica. A equação (5) é a equação do calor, que representa a variação da temperatura $u(x,t)$ em uma barra uniforme com a superfície lateral isolada termicamente.

Essa equação pode ter inúmeras soluções, por isso, para encontrar algumas mais específicas, é preciso definir algumas condições. A primeira delas é que, se existe variação da temperatura, deve haver uma temperatura inicial, essa é dita a condição inicial do problema:

$$u(x,0) = f(x).$$

onde $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ representa a temperatura inicial de cada secção da barra.

Outra questão importante a se considerar é que, como as extremidades não estão isoladas, elas podem trocar calor com o meio de várias formas, chama-se essas formas de condições de fronteira.

Busca-se, então, uma solução para a equação do calor, que atenda também suas condições inicial e de fronteira. Considerando que as extremidades tenham temperatura nula e constante, o problema fica como:

$$\begin{array}{lll} u_t = \kappa u_{xx} & t > 0, & 0 < x < L \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & t > 0 & . \\ u(x,0) = f(x) & 0 \leq x \leq L. & \end{array} \tag{6}$$

Para resolver esse problema, utiliza-se o método de Fourier, que consiste em, primeiramente, usar a separação de variáveis, assim tem-se:

$$u(x,t) = F(x)G(t). \tag{7}$$

Substituindo (7) em (5), obtém-se:

$$\frac{1}{\kappa}\frac{G'(t)}{G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)}. \tag{8}$$

Encontrando a solução dessas funções, tem-se que:

$$F_n(x) = sen\frac{n\pi x}{L} \tag{9}$$

e

$$G(t) = ce^{-n^2\pi^2\kappa t/L^2}. \tag{10}$$

E então, juntando (9) e (10), tem-se:

$$u_n(x,t) = e^{-n^2\pi^2\kappa t/L^2} sen\frac{n\pi x}{L} \tag{11}$$

que satisfaz a equação do calor e as condições de fronteira, porém, para que satisfaça a condição incial, é necessário que

$$f(x) = sen\frac{n\pi x}{L}. \tag{12}$$

Supondo que (12) seja verdadeira, é possível chegar a várias soluções u_n, para cada $n = 1, 2, 3....$ Utilizando o princípio da superposição, é possível concluir que a combinação linear de duas ou mais soluções u_n também será solução do problema (6).

Portanto, pode-se expressar esse conjunto de soluções como: $\sum_{n=1}^{N} c_n u_n(x,t)$, onde c_n representa as constantes e u_n as funções definidas em (11).

Utilizando novamente o princípio da superposição, pode-se escrever (12) como $\sum_{n=1}^{N} c_n e^{-n^2\pi^2\kappa t/L^2} sen\frac{n\pi x}{L}$.

Porém, se (12) não for verdadeira, é necessário procurar soluções semelhantes a essa, para tanto, utilizando somas infinitas, espera-se que $f(x)$ possa ser expressa como:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n sen\frac{n\pi x}{L}. \tag{13}$$

E então, a hipótese do Método de Fourier é que a solução seja:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2\pi^2\kappa t/L^2} sen\frac{n\pi x}{L}. \tag{14}$$

Porém, essa solução possui duas complicações. A primeira delas é a necessidade de que $f(x)$ tenha a forma (13); a segunda refere-se à questão da convergência da série (14), para então concluir sobre sua aplicação em (6). Para isso, a próxima seção trará resultados importantes que podem ser utilizados nessas provas.

3 Resultados importantes

Nesta seção serão apresentados alguns teoremas, proposições e outros resultados que auxiliarão na prova da aplicabilidade da solução encontrada anteriormente para o problema da condução de calor em uma barra. Esses resultados, apresentados de forma mais detalhada e juntamente com suas demonstrações, podem ser encontrados em Figueiredo (1977).

Teorema 1 (Teste M de Weirstrass). *Seja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ uma série de funções $u_n : I \to \mathbb{R}$ definida em um subconjunto I de $\mathbb{R}$. Suponha que existam constantes $M_n \geq 0$ tais que:*

$$|u_n(x)| \leq M_n$$

para todo $x \in I$, e que a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ convirja. Então, a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ converge uniforme e absolutamente em I.

Proposição 2. *Supondo que as funções u_n sejam contínuas e que a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ convirja uniformemente. Então a soma da série $u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ é também uma função contínua.*

Proposição 3. *Supondo que as funções $u_n(x)$ definidas em um intervalo I são continuamente deriváveis e que a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ das derivadas convirja uniformemente. Se, para um dado $x_0 \in I$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ convergir, então:*

$$\frac{d}{dx}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x).$$

Definição 4. Uma função f pode ser aproximada por sua Série de Fourier por meio da seguinte expressão:

$$f \approx \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n cos\frac{n\pi x}{L} + b_n sen\frac{n\pi x}{L}\Big). \tag{15}$$

Onde, se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ for uma função periódica de período $2L$, integrável e absolutamente integrável em cada intervalo limitado, especialmente $\int_{-L}^{L} |f(x)|dx < \infty$, então os números a_n, para $n \geq 0$ e b_n, para $n \geq 1$ são chamados de coeficientes de Fourier da função f, e são definidos por:

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\ cos\frac{n\pi x}{L}dx \quad , n \geq 0$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\ sen\frac{n\pi x}{L}dx \quad , n \geq 1.$$

Teorema 5 (Teorema de Fourier)**.** *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função seccionalmente diferenciável e de período $2L$. Então a série de Fourier da função f converge, em cada ponto x, para $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$, ou seja:*

$$\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)] = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n cos\frac{n\pi x}{L} + b_n sen\frac{n\pi x}{L}\Big), \tag{16}$$

onde $f(x+0) = \lim_{y\to x^+} f(y)$ e $f(x-0) = \lim_{y\to x^-} f(y)$

Teorema 6 (Desigualdade de Bessel)**.** *Seja f uma função real cujo quadrado é integrável em $-L \leq x \leq L$ e a_k e b_k os coeficientes de Fourier de f. Então:*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} |f(x)|^2\ dx. \tag{17}$$

Lembrando que, para uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, se f e $|f|^2$ forem integráveis, ela é chamada de *quadrado integrável.* Neste trabalho, essas funções serão representadas por $\mathcal{L}^2$.

4 Solução do problema de condução do calor

Utilizando os resultados apresentados na seção anterior e a modelagem da equação do calor, nesta seção será feito o estudo de uma situação específica: uma barra conduzindo calor, com as extremidades isoladas, ou seja, não há fluxo de calor nas extremidades. Para essa situação, tem-se o seguinte problema de valor inicial e de fronteira (PVIF):

$$\begin{gathered} u_t = Ku_{xx} \qquad t > 0, \qquad 0 < x < L \\ u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0 \qquad t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \qquad 0 \leq x \leq L. \end{gathered} \tag{18}$$

Utilizando o método de separação de variáveis, encontra-se que a solução deve ser $u_n(x,t) = e^{-n^2\pi^2 kt/L^2} cos\frac{n\pi x}{L}$.

Mas, para isso, deve-se encontrar coeficientes c_n que satisfaçam:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \; cos\frac{n\pi x}{L} \tag{19}$$

que podem ser considerados coeficientes de Fourier de f, considerando-a uma função par dada em $[0, L]$ e estendida de modo a ser periódica de período $2L$:

$$\begin{aligned} c_0 &= \tfrac{1}{L}\int_0^L f(x)dx \\ c_n &= \tfrac{2}{L}\int_0^L f(x)\; cos\tfrac{n\pi x}{L}dx \qquad n = 1, 2, ... \end{aligned} \tag{20}$$

Com esses coeficientes dados, a solução do PVIF nesse caso é:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \; e^{-n^2\pi^2 kt/L^2} cos\frac{n\pi x}{L}. \tag{21}$$

A demonstração da validade desta solução depende de que f possua derivada de terceira ordem e que f''' seja seccionalmente contínua. Assim, a prova é feita seguindo os passos:

(i) Mostrar que os c_n dados em (20) estão bem definidos, ou seja, que as integrais existem: já que as funções f e *cosseno* são contínuas, então o produto $f \cdot cos$ é uma função contínua, portanto integrável.

(ii) Provar que (19) ocorre: como, por hipótese, f é integrável e absolutamente integrável, então, pelo Teorema de Fourier:

$$\frac{1}{2}\tilde{a}_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\tilde{a}_n \; cos\frac{n\pi x}{L} + \tilde{b}_n \; sen\frac{n\pi x}{L}\right) = f(x) \tag{22}$$

onde $\tilde{a}_n$ e $\tilde{b}_n$ são os coeficientes de Fourier de f.

Considerando que $f(0) = f(L) = 0$, é possível estender f para $\mathbb{R}$ de modo que seja par e periódica de período $2L$ e assim tem-se:

$$\tilde{b}_n = 0, \quad \forall \; n \; \in \; \mathbb{N}. \tag{23}$$

Além disso, observando (20) e a definição dos coeficientes de Fourier, tem-se que $\tilde{a}_n = c_n, \; \forall \; n \; \in \; \mathbb{N}$. Portanto, (19) ocorre.

(iii) Provar que a série dada em (21) converge e que seu limite, u, é uma função contínua: para provar que (21) converge, utiliza-se o Teste M de Weirstrass com a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$.

Assim, deve-se mostrar que

$$|u_n(x,t)| < |c_n|, \; \forall \; n \; \in \; \mathbb{N} \quad e \quad \forall \; (x,t) \; \in [0, L] \times [0, \infty) \tag{24}$$

e que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \tag{25}$$

converge.

Para provar (25), inicialmente, nota-se que $c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\ cos\frac{n\pi x}{L}\ dx$, integrando por partes, com $u = f(x)$ e $dv = cos\frac{n\pi x}{L}$, tem-se:

$$c_n = \frac{2}{L}\Big[f(x)\cdot\frac{L}{n\pi}\cdot sen\frac{n\pi x}{L}\Big|_0^L - \int_0^L \frac{L}{n\pi}\cdot sen\frac{n\pi x}{L}\cdot f'(x)\ dx\Big].$$

Onde, como $f(0) = f(L) = 0$:

$$c_n = \frac{-2}{L}\int_0^L \frac{L}{n\pi}\cdot sen\frac{n\pi x}{L}\cdot f'(x)\ dx$$

$$c_n = \frac{-L}{n\pi}\Big(\frac{2}{L}\int_0^L f'(x)\cdot sen\frac{n\pi x}{L}\ dx\Big).$$

Onde, considerando $f'(x)$ uma função ímpar, periódica de período $2L$ e $\mathcal{L}^2$, pode-se considerar a expressão entre parenteses o seu coeficiente de Fourier d_n e então:

$$c_n = -\frac{L}{n\pi}\ d_n. \tag{26}$$

Deste modo, usando $ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$, chega-se a:

$$|c_n| = \frac{L}{n\pi}|d_n| \leq \frac{L^2}{2\pi^2}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{1}{2}|d_n|^2. \tag{27}$$

Nota-se que $\frac{L^2}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ é uma p-série com $p = 2$, e portanto é convergente. Então, é preciso ainda provar que $\sum_{n=1}^{\infty}|d_n|^2$ converge. Como $f'(x)$ é contínua, então $\int_{-L}^{L}|f'(x)|^2\ dx$ existe e, usando a desigualdade de Bessel, pode-se escrever:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|d_n|^2 \leq \frac{{d_0}^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(|d_n|^2 + |e_n|^2) \leq \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}|f'(x)|^2\ dx. \tag{28}$$

Onde d_n e e_n são os coeficientes de Fourier da série de f'. Portanto, $\sum_{n=1}^{\infty}|d_n|^2$ converge e (25) ocorre.

Para provar (24), tem-se que:

$$|u(x,t)| = \Big|c_n e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 kt}\ cos\frac{n\pi x}{L}\Big| \leq |c_n|. \tag{29}$$

Então, pelo teste M de Weirstrass, segue que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) \tag{30}$$

converge uniforme e absolutamente em $[0,L]\times[0,\infty)$

Denota-se por $u(x,t)$ o valor do seu limite. Como (30) está nas hipóteses da proposição 2, então u é contínua.

(iv) Provar que é possível derivar termo a termo a série dada em (21), com respeito a t, e que u_t é contínua: usando a proposição 3, é possível provar que:

$$u_t(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n(x,t)}{\partial t}. \tag{31}$$

E, para isso, deve-se provar que u_t (e, respectivamente, u_x) são funções contínuas.

Nota-se que:

$$\Big|\frac{\partial}{\partial t}u_n(x,t)\Big| = \Big|\frac{\partial}{\partial t}\Big(c_n e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 kt}\ cos\frac{n\pi x}{L}\Big)\Big|$$

$$= \Big| -\Big(\frac{n\pi}{L}\Big)^2 k\ c_n\ e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 kt}\ cos\frac{n\pi x}{L}\Big| \leq \frac{\pi^2}{L^2}\ k\ |c_n|\ n^2. \tag{32}$$

De acordo com (32), para provar que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial}{\partial t}u_n(x,t)$ converge, basta provar que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|\ n^2 \tag{33}$$

converge. Sabe-se, de (26) que:

$$c_n = -\frac{L}{n\pi}\Big(\frac{2}{L}\int_0^L f'(x)\ sen\frac{n\pi x}{L}\ dx\Big)$$

a qual pode ser integrada por partes, com $u = f'(x)$ e $dv = sen\frac{n\pi x}{L}$ e obtém-se:

$$c_n = -\frac{L}{n\pi}\cdot\frac{2}{L}\Big(- f'(x)\cdot\frac{L}{n\pi}\ cos\frac{n\pi x}{L}\ \Big|_0^L\ +\ \int_0^L f''(x)\cdot\frac{L}{n\pi}\ cos\frac{n\pi x}{L}\ dx\Big)$$

$$= -\frac{L^2}{n^2\pi^2}\cdot\frac{2}{L}\Big(\int_0^L f''(x)\ cos\frac{n\pi x}{L}\ dx\Big)$$

considerando que $f'(0) = f'(L) = 0$. Integrando novamente por partes, agora com $u = f''(x)$ e $dv = cos\frac{n\pi x}{L}$:

$$c_n = -\frac{L^2}{n^2\pi^2}\cdot\frac{2}{L}\Big(f''(x)\cdot\frac{L}{n\pi}sen\frac{n\pi x}{L}\Big|_0^L\ -\ \int_0^L f'''(x)\cdot\frac{L}{n\pi}sen\frac{n\pi x}{L}\ dx\Big)$$

$$c_n = \frac{L^3}{n^3\pi^3}\Big(\frac{2}{L}\int_0^L f'''(x) sen\frac{n\pi x}{L}\ dx\Big). \tag{34}$$

Onde a expressão entre parenteses pode ser considerada como λ_n, os coeficientes de Fourier de $f'''(x)$, já que a hipótese da demonstração sugere que $f'''(x)$ seja seccionalmente contínua, ou seja, pode ser expressa por sua série de Fourier. Então:

$$|c_n| = \frac{L^3}{n^3\pi^3}|\lambda_n|. \tag{35}$$

Onde pode-se usar a desigualdade $ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$ para escrever:

$$n^2|c_n| = \frac{L^3}{\pi^3}\cdot\frac{1}{n}|\lambda_n|$$

$$n^2|c_n| \leq \frac{L^6}{2\pi^6} + \frac{1}{2n^2}|\lambda_n|^2. \tag{36}$$

Onde $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge por ser p-série com $n = 2$ e $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2$ converge devido a desigualdade de Bessel, então conclui-se que (33) converge.
Usando o Teste M de Weirstrass em (32) e (33) , conclui-se que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} u_n(x,t) \tag{37}$$

converge uniformemente. Portanto, da proposição 3, tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} u_n(x,t). \tag{38}$$

Deste resultado, e pela proposição 2, segue que $\frac{\partial}{\partial t} u(x,t)$ é contínua.

(v) Provar que é possível derivar termo a termo a série dada em (21), com respeito a x, duas vezes, e que u_{xx} é contínua: para este caso, usa-se novamente o Teste M de Weirstrass, pois:

$$\left|\frac{\partial}{\partial x} u_n(x,t)\right| = \left|\frac{\partial}{\partial x}\left(c_n \; e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 kt} \; cos\frac{n\pi x}{L}\right)\right|$$

$$= \left|c_n \; e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 kt} \cdot -sen\frac{n\pi x}{L} \cdot \frac{n\pi}{L}\right| = |c_n| \left|e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 kt}\right| \left|\frac{n\pi}{L} sen\frac{n\pi x}{L}\right| \leq \frac{\pi}{L} \; n \; |c_n|. \tag{39}$$

E seguindo como em (35) e (36) é possível notar que:

$$n|c_n| = \frac{L^3}{n^2\pi^3} \; |\lambda_n| \leq \frac{L^6}{2\pi^6} \cdot \frac{1}{n^4} \; + \; \frac{1}{2}|\lambda_n|^2. \tag{40}$$

Onde $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2$ convergem, então:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|c_n| \tag{41}$$

converge. Usando o Teste M de Weirstrass em (39) e (41), segue que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} u_n(x,t) \tag{42}$$

converge uniforme e absolutamente em $[0,L] \times [0,\infty)$. Da proposição 3 tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} u_n(x,t).$$

Então, pela proposição 2, segue que $\frac{\partial}{\partial x} \; u_n(x,t)$ é contínua, como se desejava mostrar.
Analogamente, prova-se que $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \; u(x,t)$ é contínua e vale:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \; u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \; u_n(x,t).$$

(vi) Provar que (21) é solução de (18): para isso, será demonstrado que (21) satisfaz cada uma das equações de (18). Como mostrado no último item, é possível derivar $u(x,t)$ termo a termo uma vez com respeito a t e duas vezes com respeito a x, então, prova-se a primeira equação:

$$u_t = ku_{xx}$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 k\ e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 kt} \cdot cos\frac{n\pi x}{L} \ = \ -k\sum_{n=1}^{\infty} c_n\ e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 kt} \cdot \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \cdot cos\frac{n\pi x}{L}.$$

Para a segunda equação, tem-se:

$$u_x(0,t) = -\sum_{n=1}^{\infty} c_n\ e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 kt} \cdot \frac{n\pi}{L} sen(0) = 0$$

$$u_x(L,t) = -\sum_{n=1}^{\infty} c_n\ e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 kt} \cdot \frac{n\pi}{L} sen(n\pi) = 0.$$

E para a terceira equação:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\ e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 k \cdot 0}\ cos\frac{n\pi x}{L} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\ cos\frac{n\pi x}{L} \ = \ f(x).$$

Assim, está provada a validade da solução suposta no início do trabalho, de acordo com os teoremas e resultados apresentados.

Referências

BOYCE, Willian E.; DIPRIMA, Richard C. **Equações Diferenciais Elementares E Problemas de Valores de Contorno**. 9. ed. rev. Rio de Janeiro: Ltc, 2010. 604 p.

FIGUEIREDO, Djairo Guedes de. **Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais**. 2. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq (Projeto Euclides), 1977. 274 p.

Zoltan Paul Dienes e os blocos lógicos

Juliana Anjelika Santos de Souza
UNIOESTE
julianaanjelika12@hotmail.com

Arleni Elise Sella Langer
UNIOESTE
arleni.sella@unioeste.br

Resumo: Esta pesquisa apresenta reflexões a respeito do uso de Materiais Manipulativos na primeira fase educacional obrigatória, a Educação Infantil, bem como salienta que o uso destes materiais por si só não garante a aprendizagem, faz-se necessária a mediação adequada do professor. Dentre os materiais manipulativos disponíveis em inúmeras escolas de Educação Infantil, os Blocos Lógicos parecem ser os mais frequentes, sendo utilizados em diversos países.

Palavras-chave: Materiais Manipulativos; Blocos Lógicos; Educação Infantil.

1 Introdução

Dentre os materiais existentes nos Centros Municipais de Educação Infantil, os CMEIS de todo o Brasil, provavelmente, o material mais frequente são os Blocos Lógicos. São esses materiais ultrapassados, inúteis? Tem ainda potencial para enriquecer o processo de ensino aprendizagem?

Vivemos em um mundo tecnológico e as tecnologias afetam nossos alunos, a maioria deles entra em contato com diversos personagens, histórias, jogos em um único dia, assim o professor precisa ter em mente quais são os ensinamentos essenciais para a vida do aluno.

Neste mundo que se desenvolve rapidamente, como ressalta Ursula Simons (2011, p.16), "se pudermos levá-los a raciocinar, a desenvolver agilidade de pensamento e capacidade de criatividade, estarão aptos a corresponder ao que seja exigido deles"

Para tanto, torna-se um desafio ser professor neste mundo no qual as tecnologias não chegam com a mesma rapidez nas escolas e, os educadores têm o papel de preparar os alunos para enfrentar de maneira dinâmica as mudanças cada vez mais repentinas do mundo atual. A esse respeito pondera Simons (2011, p.16), "Os conteúdos que hoje parecem importantes podem, amanhã, não o ser mais. Então, como preparar nossos jovens para um futuro sobre o qual não podemos ter certezas?"

A mesma autora ainda assegura que,

> A criança, a quem for dada a oportunidade de desenvolver sua estrutura lógica, da forma mais ampla possível, terá muito mais facilidade em articular os conteúdos pedagógicos que lhe forem apresentados, passando a ser agente do seu aprender. (SIMONS, 2011, p.16)

Buscamos inicialmente analisar a importância dos materiais manipulativos, nos deteremos na biografia do criador dos Blocos Lógicos Zoltan Paul Dienes, abordando em seguida algumas potencialidades e possibilidades dos Blocos Lógicos e, por fim, consideraremos a importância do papel do professor no processo de ensino/aprendizagem com a utilização deste material.

2 Materiais Manipulativos

A aprendizagem se dá através da percepção obtida pela interação com os órgãos dos sentidos, ou seja, visão, audição, tato, paladar e olfato, logo, quanto mais sentidos forem estimulados no momento do ensino, mais significativa poderá se tornar esta aprendizagem. Em conformidade a isto, temos o proposto por Dienes,

> As impressões sensoriais que agem sobre nossos órgãos sensoriais durante nossa existência são muito numerosas e variadas. Ainda devemos selecionar tais impressões de algum modo que possamos nos encontrar nesse ambiente de fenômenos extremamente complexo. (DIENES, 1974 p.13).

Recebemos muitos estímulos sensoriais durante toda nossa vida, e através deles desenvolvemos a aprendizagem que temos no momento, a qual não é estática, conforme o tempo passa mais aprendizagens vamos adquirindo e transformando a pessoa que somos no momento atual. Cada ser humano seleciona todas estas impressões que são variadas, numerosas e complexas.

Neste sentido vamos propor a utilização dos materiais manipulativos para aprendizagem de conceitos, pois quanto mais órgãos dos sentidos forem estimulados no processo de ensino, mais significativa poderá se tornar esta aprendizagem.

Nesse trabalho a decisão foi por tomar a definição utilizada por Nacarato para quem materiais manipulativos são "objetos ou coisas que o estudante é capaz de sentir, tocar, manipular e movimentar. Podem ser objetos reais que têm aplicação no cotidiano ou podem ser objetos usados para representar uma ideia." (NACARATO, 2005, p.3)

Materiais manipulativos, nesta concepção, não são apenas jogos, mas também tudo o que o professor utiliza com uma intencionalidade pedagógica, o que serve como base para assimilação e compreensão de algum conteúdo.

Notamos que não se faz necessário ter uma aplicação no cotidiano, Nacarato comenta que podem ser objetos usados para representar uma ideia, ou seja, aquilo que leve o aluno a organizar o seu pensamento a respeito de algum conteúdo, mas necessariamente, precisa ser algo palpável, que o aluno possa manusear e tocar.

Existem vários tipos de materiais didáticos manipuláveis ou concretos, como nomeia Lorenzato (2006). O autor diferencia estes materiais da seguinte maneira,

> Alguns não possibilitam modificações em suas formas [...]. Outros já permitem uma maior participação do aluno [...]. Existem, ainda, aqueles dinâmicos, que, permitindo transformações por continuidade, facilitam ao aluno a realização de redescobertas, a percepção de propriedades e a construção de efetiva aprendizagem. (LORENZATO, 2006, p.18-19)

Neste sentido, notamos que podem existir os materiais que não alteram sua configuração, sua maneira de ser, como por exemplo os sólidos geométricos; contudo existem aqueles com os quais o aluno pode interagir, como é o caso dos jogos de tabuleiro, material dourado, ábaco e por último, aqueles que permitem redescobertas a cada nova manipulação.

Por meio do uso dos materiais manipuláveis podemos estimular a aquisição de conceitos matemáticos e levar os alunos a aprender de maneira significativa esses conceitos, assim, Lorenzato (2006) sustenta que o material concreto ou manipulativo “pode ser um excelente catalizador para o aluno construir o seu saber matemático” (2006, p. 21)

Contudo, o contato com materiais manipulativos por si só, não garante a aprendizagem, como afirma Lorenzato:

> Convém termos sempre em mente que a realização em si de atividades manipulativas ou visuais não garante a aprendizagem. Para que esta efetivamente aconteça, faz-se necessária também a atividade mental, por parte do aluno. (LORENZATO, 2006, p.21)

Percebemos assim que o aluno precisa participar de maneira ativa na construção de seu conhecimento, precisa protagonizar o seu saber, pois apenas o uso do material não garante a aprendizagem. O que poderá garantir é a atividade mental deliberada do aluno, se ele verdadeiramente está percebendo o sentido da utilização deste material, se está participando ativamente de todas as etapas propostas pelo professor, assim como afirma o criador dos Blocos Lógicos, “há que dar a dinâmica atividade de pesquisa mais importância que a categoria final da resposta” (DIENES,1977,p. 9), ou seja, é mais importante que o aluno participe do processo, entendendo o objetivo de cada passo, o porquê de cada etapa, do que meramente saiba o resultado, a resposta final.

Ainda sobre a relevância do uso dos materiais manipuláveis, é sabido que no ensino da matemática ele é muito visado, Dienes (1977 p.8) ressalta a importância de seu uso muitas vezes, sustentando que,

> O objetivo visado é que todas as crianças de escola, cheguem a compreender bem todas as facetas da atividade matemática [...] A compreensão matemática é universal, está ao alcance de quem queira pagá-la pelo seu justo preço. Qual é esse preço? Uma vasta quantidade de Material Didático.

Aqui, novamente notamos a relevância que este autor atribui ao uso do material didático, ele destaca que é importante que todas as crianças tenham o acesso ao material, para que possam desenvolver bem todas as etapas da compreensão da atividade matemática

Ainda vale ressaltar que não é só para crianças que os materiais manipulativos devem ser utilizados, geralmente tem-se a ideia errônea de que as faixas etárias mais avançadas já construíram completamente a abstração e não necessitam do recurso visual e palpável, mas Lorenzato (2006 p.30) afirma que, “a experiência tem mostrado que o Material Didático (MD) facilita a aprendizagem, qualquer que seja o assunto, curso ou idade, o que conflita com a crendice de que MD só deve ser utilizado com crianças.”

Vale ressaltar que Lorenzato nomeia de material didático os instrumentos úteis ao processo de aprendizagem e de material didático manipulável os materiais que podemos manusear, os quais existem vários tipos, como supracitado. Bem como Dienes nomeia como material didático apenas, mas se referindo também aquilo que podemos manipular. Assim as duas nomenclaturas apresentadas por estes dois autores são apresentadas como sinônimas.

De tal forma, agora que caracterizamos o que compreendemos por materiais didáticos manipuláveis, iremos tratar especificamente sobre os Blocos Lógicos, que fazem parte desta categoria e possuem possibilidades de trabalho para Educação Infantil e Ensino Fundamental.

3 Blocos Lógicos

A criação dos Blocos Lógicos é atribuída ao psicólogo e matemático húngaro, Zoltan Paul Dienes, na década de 50. Mas esse material chegou ao Brasil no período áureo do Movimento da Matemática Moderna - MMM, no início da década de 70. Este matemático, defendia o uso dos materiais manipulativos e jogos na aquisição de conceitos matemáticos.

Durante a difusão do MMM o referido matemático teve grande contribuição, principalmente para o Ensino Primário, suas ideias e seu incentivo ao uso de materiais concretos fez com que tornasse potencialmente considerado seu uso para o ensino. Zoltan Paul Dienes é reconhecido por educadores matemáticos brasileiros atuais, conforme afirma Nacarato,

> Dienes – que talvez tenha sido o pesquisador que maiores contribuições e influências tenha exercido nos anos de 1970 quanto ao uso de materiais didáticos – dedicou-se a estudar e propor atividades e materiais para o ensino de Matemática. Tinha como princípio de que a experiência deveria preceder a análise, ou seja, as experiências cuidadosamente escolhidas pelo professor sustentariam o fundamento sobre o qual estaria baseado o aprendizado matemático. (NACARATO 2005, p.02)

Desta forma, notamos que este matemático não defendia apenas o uso dos materiais manipulativos, mas uma abordagem, uma metodologia adequada, pensada e escolhida com cautela pelo professor para, possivelmente, resultar na aprendizagem.

Segundo Sangiorgi (1989), renomados autores do período do MMM valorizavam as propostas de Dienes:

> Zoltan Paul Dienes é, entre todos os grandes reformuladores, o que maior contribuição científica trouxe ao ensino de Matemática nestes últimos quinze anos. Dienes é [...] o mais harmonioso ‘condottiere’ da Matemática Moderna pois, através dos jogos, que servem para quase tudo (inclusive para aprender a calcular), a criança é encorajada para o processo de abstração (SANGIORGI, 1975 apud BURIGO, 1989, p. 174)

Podemos perceber a notoriedade e reconhecimento de Dienes mais uma vez com relação ao aspecto metodológico. Notamos que, pela visão de Burigo, ele se preocupava em valorizar o concreto para que a criança conseguisse prosseguir consequentemente para o processo de abstração.

Os Blocos Lógicos são compostos por 48 peças diferentes que podem ser classificadas em quatro categorias: cores, tamanho, espessura e forma. No que se refere à categoria cores, temos vermelho, amarelo e azul (cores primárias); tamanho, temos pequeno e grande; espessura temos fino e grosso e por fim forma, temos quadrado, círculo, triângulo e retângulo. Todas as peças possuem pelo menos um aspecto de diferença entre si. Geralmente são produzidos em madeira ou em material emborrachado. São um material de fácil acesso pelos professores e estão presentes na maioria das escolas de Educação Infantil e Ensino Fundamental.

Considera-se que seu uso pode contribuir para desenvolver importantes operações lógicas, principalmente com crianças que se encontram em faixa etária pré-escolar. Segundo a teoria desenvolvida por Vygotsky e adotada para o currículo da região oeste do Paraná, as crianças na etapa pré-escolar – 3 a 7 anos, estão no jogo dos papéis sociais, o que é apresentado nos pressupostos psicológicos do currículo da Associação dos Municípios do Oeste do Paraná, AMOP, para criança nesta fase

> O jogo é influenciado pelas atividades humanas e pelas relações entre as pessoas e o conteúdo fundamental é o homem. Nesse sentido o jogo tem grande influência no desenvolvimento psíquico da criança e na formação da sua personalidade. (AMOP, 2015, p.18).

Sendo assim, os mesmos encontram-se na fase do "faz de conta", sendo que propor o jogo utilizando materiais manipulativos, envolvendo situações problemas, vai ao encontro do que a criança desta etapa precisa.

Ainda neste sentido, surge a impressão de Clotilde Giublin, no livro Blocos Lógicos,

> A prática é essencialmente prazerosa, pois partimos das coisas elementares e acrescentamos níveis de dificuldade pelos quais as crianças precisam passar. Elas adoram este tipo de atividade, pois descobrir enigmas e desvendar mistérios são sua brincadeira predileta. Desta forma, brincando, crescem e desenvolvem-se; nesta interação, neste clima de brincadeiras, as crianças aprendem a aprender. (GIUBLIN, 2011 *apud* SIMONS, 2011, p.21)

Notamos que as brincadeiras podem ajudar as crianças em seu processo de aprendizagem. A partir do contato e da prática elas podem aprender de maneira prazerosa. Nesta troca de vivências e experiências com objetos e com o meio é que pode ocorrer a aprendizagem.

A respeito da utilização dos Blocos Lógicos, Alvez e Morais (2006) sustentam que a função principal deste material é dar às crianças a oportunidade de realizar as primeiras operações lógicas, como correspondência e classificação de objetos, além de seriação, sequência e comparação. Assim, parece que por meio de atividades e situações mediadas pelo professor, o aluno pode iniciar o processo de abstração matemática.

As crianças aprendem por meio de suas experiências, aquilo que o indivíduo teve a oportunidade de vivenciar comporá seu saber, pois,

> É por meio de suas próprias experiências e não das de outros que as crianças aprendem melhor. Por isso as relações lógicas, que quisermos que as crianças aprendam, deverão concretizar-se por relações efetivamente observáveis entre atributos fáceis de distinguir, tais como cor, forma, etc. (DIENES; GOLDING, 1974, p.4)

Notamos ainda que a criança precisa de um aparato visual, tátil, enfim, que estimule a maior quantidade de sentidos simultaneamente, assim como dito anteriormente, pois assim pode ocorrer a aprendizagem e os Blocos Lógicos podem auxiliar neste sentido, já que estes atributos podem ser percebidos.

Outro aspecto interessante desse material é a relação que o mesmo possui com a aquisição de conceitos geométricos que estarão presentes em todas as etapas escolares, com diferentes níveis de aprofundamento.

Portanto, o uso deste material, objetiva o desenvolvimento e aprimoramento do raciocínio lógico, que enriquece a aprendizagem nas diversas áreas do saber, não somente na Matemática, mas principalmente nela, como afirma Dienes (1977, p.14) o número é uma abstração. Os números não têm existência real, são simples propriedades; mas são propriedades dos conjuntos de objetos, e não dos próprios objetos.

O autor sustenta que esse importante conceito de lógica será usado para obtenção do conceit

o de números e quantidades, pois segundo Dienes nenhum objeto pode ter a propriedade "dois", mas um conjunto de objetos pode ter a propriedade "dois" e consequentemente para a abstração do conceito de conjuntos e, os conjuntos já são abstrações, ele segue comentando que tampouco o símbolo 2 é dois, da mesma forma que a palavra "verde" é uma representação da cor verde. Nesse sentido é muito importante que criança construa o conceito dos números a partir do manuseio de objetos e da percepção das propriedades dos objetos; isso poderá ser feito por meio da utilização dos Blocos Lógicos, em cujo material permite perceber visualmente propriedades em cada uma das peças.

> O processo de aquisição das noções como as que se encontram em matemática possui três fases: Primeira fase é a atividade exploratória da criança, pode gerar maturação se escolhidas atividades lúdicas que se organizem em formas de jogos. Segunda fase, ou fase intermediária, são as regras que ligam os fatos entre si, o jogo em si. O pensamento torna-se consciente, dirigido. Se organiza como um todo. Terceira fase, é a exploração em sua via prática, quando internalizado o conhecimento pelo jogador. (DIENES, 1977, p.11)

Citamos o aspecto multidisciplinar, como, por exemplo, as cores primárias das peças, que podemos relacionar com a disciplina de Arte, pois esta prática enriquece a aprendizagem, trazendo significado e relação com o meio em que a criança está inserida. Assim estaremos de acordo com o objetivo da educação proposto pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação 9394/96, a qual ressalta que a educação deve vincular-se à prática social.

4 Papel do professor

Vimos que o Material Manipulativo e os Blocos Lógicos por si só não ensinam, para tanto faz-se de suma importância que o professor tenha o papel de mediador dos materiais com os alunos, a postura que o professor assumir diante da sua tarefa de ensinar será fator determinante na aprendizagem dos alunos.

Nesse sentido, Lorenzato (2006) pondera que é de suma importância a mediação do professor, pois o material por si só, não ensina; fundamental é que o professor saiba usar os materiais da maneira correta, isso é o que poderá determinar a ocorrência da aprendizagem,

> Por melhor que seja, o MD (material didático) nunca ultrapassa a categoria de meio auxiliar de ensino, de alternativa metodológica à disposição do professor e do aluno, e, como tal, o MD (material didático) não é a garantia de um bom ensino, nem de uma aprendizagem significativa e não substitui o professor. (LORENZATO, 2006, p.18)

Para tanto, notamos que a maneira de agir do professor mediante o uso dos materiais poderá gerar a aprendizagem e este é o fator determinante para que esta ocorra, mas nem todos os professores possuem formação para estas ações, nem estão cientes de toda a gama de potencialidades dos materiais,

> [...] poucas são as instituições responsáveis pela formação de professores que ensinam os seus alunos a usarem o MD (material didático). Em decorrência muitos professores não sentem falta de MD (material didático) em suas práticas pedagógicas, ou não dispõem de MD (material didático), ou não acreditam nas influências positivas do uso do MD (material didático) na aprendizagem, ou não sabem utilizar corretamente o MD (material didático). (LORENZATO, 2006, p.34-35)

Fica reforçada a necessidade de se investir na formação de professores, pois muitas vezes os mesmos não utilizam determinados materiais em suas aulas por não se sentirem seguros, não terem o domínio de suas potencialidades. Quem sai em desvantagem com isto é o aluno, que deixa de receber tais estímulos sensoriais e informações que podem gerar aprendizagem.

Passos (2006), por sua vez, relata que estes materiais cooperam na relação professor/aluno/conhecimento e destaca a necessidade de discussões de caráter epistemológico sobre esses recursos na formação dos professores. Percebe-se que essa autora encara os materiais manipulativos como uma ponte que leva o aluno ao conhecimento. Contudo, salienta a autora a suma importância da mediação do professor, e a formação deste profissional, pois é isto que determinará de fato um ensino adequado que poderá promover a aprendizagem. Lorenzato (2006), acerca da mediação do professor, salienta que, se o professor concebe a Matemática apenas como uma sequência de regras, proposições e deduções e o intuito é apenas resolver exercícios, avaliações e concursos, o mesmo poderia utilizar-se apenas do quadro negro. Destaca que o importante para o aluno é a descoberta, a investigação, ressaltando que:

> O modo de utilizar cada MD depende fortemente da concepção do professor a respeito da matemática e da arte de ensinar. [...] Para o aluno, mais importante que conhecer essas verdades matemáticas, é obter a alegria da descoberta, a concepção da sua competência, a melhoria da autoimagem. A certeza de que vale a pena procurar soluções e fazer constatações, a satisfação do sucesso, e compreender que a matemática, longe de ser um bicho-papão, é um campo de saber em que ele, aluno, pode navegar. (LORENZATO, 2006, p.25)

Portanto, reforça a importância do uso de Materiais Manipulativos no processo de ensino, sem esquecer, da mediação do professor e de que este, o professor, precisa ter objetivos claros com seu trabalho.

É possível explorar as potencialidades das crianças com mediação do professor, pois como já vimos este não será o protagonista do processo de ensino e sim um mediador.

O Professor precisa utilizar as perguntas e ferramentas adequadas para que o aluno construa seu conhecimento, como o que é proposto por Dienes (1974) para que o processo de aprendizagem matemática se verifique continuamente de uma forma criadora.

Dienes ainda, prossegue reafirmando a importância da resolução de problemas, acreditando que os mesmos precisam estar vinculados com a realidade do aluno. O mesmo autor assegura que além da criança saber resolver um problema, a mesma pode saber criá-lo, e fará isso por meio da mediação do professor, pois o autor afirma que

> O papel do professor é o de guia das crianças na aquisição da habilidade de formular este tipo de pergunta de maneira que as respostas pareçam surgir do ambiente. A maneira de formular um problema é tão importante na aprendizagem quanto a própria descoberta da solução do problema. (DIENES, 1974, p.49)

Por meio do uso deste material, segundo seu criador, é possível aprimorar e consolidar conceitos que precisam ser trabalhados nesta importante fase educacional que o aluno da Educação Infantil se encontra. Para Dienes (1974, p. 01) "os conceitos não se ensinam – tudo que se pode fazer é criar, apresentar situações e as ocorrências que ajudarão a formá-los". Assim, o autor assegura que diante de situações enriquecedoras o aluno poderá constituir alguns dos processos mentais básicos para a aprendizagem da Matemática.

Conclusões

Notamos que as vezes se têm a visão errônea de que o uso de materiais manipuláveis para o ensino favorece apenas o brincar por brincar, sem nenhuma objetividade e não demanda atenção e dedicação do professor. Pelo contrário, embora alguns ainda pensem que o professor utiliza os jogos como desculpa para não aproveitar o tempo de suas aulas, o uso de materiais manipulativos pode favorecer muito a aprendizagem, se for disponibilizado em atividades enriquecedoras, bem elaboradas.

Por meio desse trabalho foi possível perceber que materiais manipulativos, como os blocos lógicos, exigem uma preparação e um planejamento do professor, para que possa realizar atividades com intencionalidade educacional.

E por fim, notamos que os Blocos Lógicos apresentam uma vasta gama de possibilidades de trabalho para introdução de conceitos lógicos para crianças em faixa etária pré-escolar, mas não apenas desta faixa etária, o material pode ser utilizado em outras etapas escolares, desde que o professor adeque as atividades e maneiras de trabalho.

Agradecimentos

Agradecemos, primeiramente a Deus, por ter nos dado saúde e força e a minha orientadora Profª. Msc. Arleni Elise Sella Langer pela atenção e suporte dedicados nas correções e incentivos

Referências

ALVEZ, Carla; MORAIS, Carlos Mesquita. Recursos de apoio ao processo de ensino e aprendizagem da matemática. In I. Vale, T. Pimentel, Ac. Barbosa, L.Fonseca & P. Canavarro (Orgs), **Números e álgebra: na aprendizagem da matemática e na formação de professores**, p. 335-349. Lisboa: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, 2006.

BURIGO, Elisabete Zardo. **Movimento da Matemática Moderna no Brasil:** Estudo da Ação e do pensamento de educadores matemáticos nos anos 60. 1989. 285 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1989. Disponível em: http://hdl.handle.net/10183/5237. Acessado em: 15 ago. 2020.

DIENES, Zoltan Paul; GOLDING, E. W. **Lógica e jogos lógicos**. Tradução de Euclides José Dotto. 2 ed. rev. São Paulo: EPU, 1974; Brasília: INL, 1974.

_____. **A Matemática Moderna no Ensino Primário**. 4. ed. Lisboa, Portugal: Livros Horizonte, 1977.

LORENZATO, Sergio. Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis. In: LORENZATO, Sergio. **O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores**. Campinas, SP: Autores Associados, 2006. cap. 1, p. 3-37.

NACARATO, Adair Mendes. Eu Trabalho Primeiro no Concreto**. Revista de Educação Matemática.** São Paulo: SBEM – Regional São Paulo, v. 9-10, n. 9, 2005.

PASSOS, CármemLúciaBrancaglion. Materiais manipuláveis como recursos didáticos na formação de professores de matemática. In: LORENZATO, Sérgio(org.). **O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores**. Campinas: Autores Associados, 2006. p. 77-92.

SIMONS, Ursula Marianne. **Blocos Lógicos:** 150 atividades para flexibilizar o raciocínio. 3. ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2011.

Introdução à topologia métrica

Milena Cristina Heydt[2]
Universidade Estadual do Oeste do Paraná
milenaheydt@hotmail.com

Flavio Roberto Dias Silva
Universidade Estadual do Oeste do Paraná
frdsilva@yahoo.com.br

Resumo: Este trabalho apresenta uma introdução ao estudo da Topologia e alguns principais conceitos como "aberto-fechado", interior, fecho e fronteira. Será apresentado um resultado de equivalência entre figuras geométricas a partir do conceito de continuidade. Com este resultado será possível dizer que um círculo unitário e um quadrado com a medida de seus lados sendo raiz de dois, são topologicamente equivalentes.

Palavras-chave: Topologia; espaços topológicos; espaços métricos.

1 Introdução

A topologia começou como ramo da geometria, porém durante o século XX passou por generalizações e hoje pode ser considerada ao lado da Geometria, Álgebra e Análise como uma das partes fundamentais da matemática.

De acordo com Eves(1995), a topologia estuda as propriedades das figuras geométricas que não se alteram sob transformações topológicas, isto é, aplicações contínuas com suas inversas também contínuas.

Eves(1995), afirma que uma figura geométrica é qualquer conjunto composto por pontos do espaço tridimensional ou dimensão superior e quaisquer duas figuras que podem ser transformadas topologicamente uma na outra se dizem homeomorfas ou topologicamente equivalentes.

2 Resultados e discussão

Definição 1. Seja M um conjunto não-vazio. Uma função $d : M \times M \to \mathbb{R}$ é dita ser uma métrica em M se, para quaisquer x, y e z tenhamos:

(D1) Positividade: $d(x, y) \geq 0$.

(D2) Condição de distância nula: $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

(D3) Simetria: $d(x, y) = d(y, x)$.

(D4) Desigualdade triangular: Vale $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

[2] A realização deste trabalho não seria possível sem o apoio financeiro da Fundação Araucária.

No exemplo a seguir a demonstração das propriedades de métrica podem ser encontradas em (Lima, 2015) e (Domingues, 1982).

Exemplo 1. No espaço $\mathbb{R}^n$ são métricas as funções d, d' e d'': Sejam $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ e $y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ escrevemos,

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}$$

$$d'(x,y) = |x_1 - y_1| + ... + |x_n - y_n|$$

$$d''(x,y) = max\{|x_1 - y_1|, ..., |x_n - y_n|\}$$

Usualmente chamamos a métrica d em $\mathbb{R}^n$ como métrica usual.

Definição 2. (Espaço Métrico) Um espaço métrico é um par (M,d), onde M é um conjunto não vazio e d é uma métrica em M. Usualmente dizemos o espaço métrico M.

Definição 3. (Bolas abertas) Seja (M,d) um espaço métrico e $p \in M$. Sendo $\epsilon > 0$ um número real, a bola aberta de centro em p e raio ϵ é o seguinte conjunto

$$B(p,\epsilon) = \{x \in M/d(x,p) < \epsilon\}$$

Exemplo 2. Bolas no espaço $\mathbb{R}^2$: As seguintes bolas serão definidas em relação às métricas d, d' e d''. Seja $p = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ e $\epsilon > 0$ temos,

Em relação à métrica d,

$$B(p,\epsilon) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; (x-a)^2 + (y-b)^2 < \epsilon^2\}$$

Quando a métrica for d',

$$B(p,\epsilon) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; |x-a| + |y-b| < \epsilon\}$$

Quando a métrica for d'',

$$B(p,\epsilon) =]a-\epsilon, a+\epsilon[\times]b-\epsilon, b+\epsilon[$$

Definição 4. (Diâmetro de um conjunto) Seja $A \subset M$ um conjunto não vazio, se existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $d(x,y) \leq k$ para todo $x, y \in A$ dizemos que A é limitado. Sendo A limitado chama-se de diâmetro de A o número

$$d(A) = \sup\{d(x,y); x, y \in A\}$$

Abaixo estão algumas propriedades de bolas genéricas de um espaço métrico (M,d) qualquer. As demonstrações podem ser encontradas em Domingues (1982).

(P1) Dadas $B(p,\epsilon)$ e $B(p,\delta)$, se $\epsilon \leq \delta$ então, $B(p,\epsilon) \subset B(p,\delta)$.

(P2) Dado $q \in B(p,\epsilon)$ então existe δ de maneira que $B(q,\delta) \subset B(p,\epsilon)$.

(P3) Sejam $B(p,\epsilon)$ e $B(q,\delta)$ bolas não disjuntas. Se $t \in B(p,\epsilon) \cap B(q,\delta)$ então, existe $\lambda > 0$ tal que $B(t,\lambda) \subset B(p,\epsilon) \cap B(q,\delta)$.

(P4) Sejam p e q, $p \neq q$ pontos de M. Se $d(p,q) = \epsilon$ então, $B(p,\frac{\epsilon}{2}) \cap B(q,\frac{\epsilon}{2}) = \emptyset$.

(P5) Dadas $B(p,\epsilon)$ e $B(q,\delta)$, se $\epsilon + \delta \leq d(p,q)$ então, $B(p,\epsilon) \cap B(q,\delta) = \emptyset$.

(P6) O diâmetro de uma bola $B(p,\epsilon)$ é menor que ou igual a 2ϵ.

Definição 5. (Métricas equivalentes) Sejam d e $d^{'}$ métricas de um mesmo conjunto M, diz-se que d e $d^{'}$ são equivalentes se, para cada $p \in M$, qualquer que seja a bola $B_d(p,\epsilon)$, existe $\lambda > 0$ tal que $B_{d'}(p,\lambda) \subset B_d(p,\epsilon)$. E além disso, vale que para toda bola $B_{d'}(p,\epsilon)$, existe $\lambda > 0$ tal que $B_d(p,\lambda) \subset B_{d'}(p,\epsilon)$. Indicaremos $d \sim d^{'}$.

Definição 6. (Topologia) Uma coleção τ de subconjuntos de um conjunto não vazio E é uma topologia sobre E se:

i) $\emptyset$, $E \in \tau$.

ii) X, $Y \in \tau \Rightarrow X \cap Y \in \tau$.

iii) Se (X_i) é uma família de membros de τ, então $\cup X_i \in \tau$.

O par (E,τ) é chamado espaço topológico.

Definição 7. (Conjunto aberto) Seja (M,d) um espaço métrico. Um subconjunto $A \subset M$ se diz aberto se para todo $p \in A$ existe um número real $\epsilon > 0$ tal que $B(p,\epsilon) \subset A$.

Exemplo 3. Consideremos sobre $\mathbb{R}$ a métrica usual. $A =]a,+\infty[$ é aberto para todo $a \in \mathbb{R}$, uma vez que dado $p \in A$, tomando $\epsilon = \frac{p-a}{2}$, temos $]p-\epsilon, p+\epsilon[\subset A$. De modo análogo se prova que são abertos nesse espaço todos os intervalos do tipo $]a,b[$.

Neste mesmo espaço não são abertos os conjuntos $[a,b[$ e $[a,+\infty[$ para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, pois nenhuma bola aberta de centro em a está contida nesses conjuntos.

Exemplo 4. Toda bola aberta $B(p,\epsilon)$ num espaço métrico (M,d) é um conjunto aberto. A propriedade P2) das bolas abertas nos garante a afirmação.

Proposição 8. *Seja $\mathcal{A}$ a coleção dos conjuntos abertos de um espaço métrico (M,d). Então:*

i) $\emptyset$, $E \in \mathcal{A}$.

ii) A, $B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$.

iii) Se (A_i) é uma família de conjuntos abertos de M, ou seja, se cada $A_i \in \mathcal{A}$, então $\cup A_i \in \mathcal{A}$.

Prova. i) O conjunto $\emptyset$ não contém pontos para contrariar a definição, logo é aberto.

M é um conjunto aberto pois toda bola de centro em $p \in M$ é um subconjunto de M.

ii) Seja $p \in A \cap B$. Então existem $\epsilon > 0$ e $\lambda > 0$ tais que $B(p,\epsilon) \subset A$ e $B(p,\lambda) \subset B$. Supondo $\epsilon \leq \lambda$, a propriedade (P1) das bolas abertas garante que $B(p,\epsilon) \subset B(p,\lambda)$ e como $B(p,\lambda) \subset B$, então $B(p,\lambda) \subset A \cap B$.

iii) Seja $p \in \cup A_i$, então existe um índice t tal que $p \in A_t$, e como A_t é aberto, para um certo $\epsilon > 0$ vale a relação $B(p,\epsilon) \subset A_t$. Então $B(p,\epsilon) \subset \cup A_i$. Logo $\cup A_i$ é aberto.

□

Levando em conta a definição 5, $\mathcal{A}$ é uma topologia e $(M, \mathcal{A})$ um espaço topológico.

Proposição 9. *Sejam d_1 e d_2 métricas equivalentes sobre M. Se $\mathcal{A}_1$ é a coleção dos conjuntos abertos de (M, d_1) e $\mathcal{A}_2$ é a coleção dos conjuntos abertos de (M, d_2) então $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$.*

Prova. Ver Domingues(1982). □

Definição 10. (Ponto interior) Seja (M, d) um espaço métrico. Se $A \subset M$, um ponto $p \in A$ é chamado de ponto interior ao conjunto A se existe $\epsilon > 0$ tal que $B(p,\epsilon) \subset A$. O conjunto dos pontos interiores de A é chamado interior de A e indicado por A°. É claro que $A^\circ \subset A$.

Proposição 11. *Se todos os pontos de A são interiores, isto é, se $A = A^\circ$, então A é aberto.*

Prova. De fato, dado $p \in A$, existe $\epsilon > 0$ de modo que $B(p,\epsilon) \subset A$. A recíproca também é válida, assim temos que: A é aberto se, e somente se $A = A^\circ$. □

Exemplo 5. Vamos considerar na reta real os intervalos $A = [a, b[$ e $B = [a, +\infty[$. Em ambos os casos o ponto a não é interior: um intervalo $]a - \epsilon, a + \epsilon[= B(a, \epsilon)$ não está contido nem em A nem em B.

Definição 12. (Fronteira) A fronteira de um conjunto $A \subset M$ é o conjunto ∂A, formado pelos pontos $p \in M$ tais que toda bola aberta de centro em p contém pelo menos um ponto de A e um ponto do complementar $M - A$.

Proposição 13. *$A \subset M$ é aberto se e somente se $A \cap \partial A = \varnothing$.*

Prova. Ver Lima(2015). □

Definição 14. (Conjunto fechado) Seja (M, d) um espaço métrico. Um subconjunto $F \subset M$ se diz fechado se, e somente se $M - F$ é aberto.

Exemplo 6. Na reta real são fechados os intervalos do tipo $[a, b]$, $[a, +\infty[$ e $]-\infty, a]$.

Isto é fato pois,

$M - [a, b] =]-\infty, a[\cup]b, +\infty[$ e cada um destes intervalos é aberto,

$M - [a, +\infty[=]-\infty, a[$ é aberto,

$M -]-\infty, a] =]a, +\infty[$ é aberto.

Proposição 15. *Seja $\mathcal{F}$ a coleção dos conjuntos fechados de um espaço métrico (M, d). Então:*

i) $\emptyset$ e M pertencem a $\mathcal{F}$.

ii) $H, F \in \mathcal{F} \Rightarrow H \cup F \in \mathcal{F}$.

iii) Se F_i é uma família de conjuntos fechados de M, então $\cap F_i \in \mathcal{F}$.

Prova. Ver Domingues(1982). □

Definição 16. (Fecho de um conjunto) Seja A um subconjunto de um espaço métrico (M, d). Um ponto $p \in M$ se diz aderente ao conjunto A se, para todo $\epsilon > 0$, vale $B(p, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$.

O conjunto dos pontos aderentes ao conjunto A se diz fecho de A e é denotado por $\overline{A}$.

Proposição 17. *Seja (M, d) um espaço métrico. Então, para todo $A \subset M$ vale a relação $(\overline{A})^c = (A^c)^\circ$. (O complementar do fecho de A é igual ao interior do complementar de A).*

Prova. Ver Domingues(1982). □

Corolário 18. *O conjunto $F \subset M$ é fechado se e somente se $\overline{F} = F$.*

Prova. Ver Domingues(1982). □

Definição 19. (Função contínua) Sejam M e N espaços métricos. Uma função $f : M \to N$ se diz contínua no ponto $p \in M$ se, para qualquer $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ de modo que

$$d(x, p) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(p)) < \epsilon.$$

A função f será contínua quando ela for contínua em todos os pontos de M.

Proposição 20. *Uma função $f : M \to N$ é contínua no ponto $p \in M$ se, e somente se, dada uma bola $B(f(p), \epsilon)$ existe uma bola $B(p, \delta)$ tal que*

$$f(B(p, \delta)) \subset B(f(p), \epsilon).$$

Prova. $(\Rightarrow)$ Dada a bola $B(f(p), \epsilon)$ considerando seu raio ϵ, existe, por hipótese $\delta > 0$ tal que

$$d(x, p) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(p)) < \epsilon.$$

Considerando a bola $B(p, \delta)$ vamos mostrar que sua imagem direta por f está contida em $B(f(p), \epsilon)$. De fato, se $y \in f(B(p, \delta))$ então $y = f(x)$ com $x \in B(p, \delta)$. Daí, $d(x, p) < \delta \to d(f(x), f(p)) < \epsilon$. Assim $y = f(x) \in B(f(p), \epsilon)$.

$(\Leftarrow)$ Por hipótese, dada uma bola $B(f(p), \epsilon)$, existe $B(p, \delta)$ tal que

$$f(B(p, \delta)) \subset B(f(p), \epsilon).$$

Dado $y \in f(B(p, \delta))$, como $f(B(p, \delta)) \subset B(f(p), \epsilon)$, então $d(y, f(p)) < \epsilon$, mas $y = f(x)$ para algum $x \in B(p, \delta)$ então $d(x, p) < \delta$. Logo, $x \in B(p, \delta) \to f(x) \in f(B(p, \delta)) \subset B(f(p), \epsilon)$ assim, $d(x, p) < \delta \to d(f(x), f(p)) < \epsilon$. □

Proposição 21. *Se $f : M \to N$ e $g : N \to P$ são contínuas, então $g \circ f : M \to P$ também é contínua.*

Prova. Ver Domingues(1982). □

Definição 22. (Espaços homeomorfos) Se M e N são espaços métricos, uma aplicação $f : M \to N$ é chamada homeomorfismo se, e somente se

a) f é bijetora.

b) f e sua inversa f^{-1} são contínuas.

Neste caso os espaços M e N se dizem homeomorfos.

Observação 1. Se $f : M \to N$ e $g : N \to P$ são homeomorfismos então $g \circ f : M \to P$ também é um homeomorfismo.

Nos exemplos a seguir vamos nos limitar apenas a apresentar o homeomorfismo sem exibir sua verificação.

Exemplo 7. O círculo unitário $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$ e o quadrado $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |x| + |y| = 1\}$ do espaço euclidiano são homeomorfos.

O homeomorfismo que relaciona esses dois espaços é dado pela função $f : Q \to S^1$, definida por

$$f(x, y) = (\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}).$$

Exemplo 8. O plano perfurado $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; x \neq 0, y \neq 0\}$ e o cilíndrico circular reto $Y = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 1\}$ são homeomorfos.

O homeomorfismo que relaciona esses dois espaços e dado pela função $f : Y \to X$ definida por

$$f(x, y, z) = (xe^z, ye^z).$$

Referências

DOMINGUES, H. H. Espaços métricos e introdução a topologia. São Paulo: Atual Editora, 1982. 183 p.

EVES, H. Introdução à história da matemática. Tradução: H. H. DOMINGUES. 5. ed. Campinas: UNICAMP, 1995. 848 p.

LIMA, E. L. Espaços métricos. 5. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2015. 299 p.

O Conceito de função: definição de função.

Pedro Pablo Durand Lazo
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - UNIOESTE
ppdurandlazo@gmail.com

Resumo: Se estuda o ***conceito de função*** em um de seus aspectos mais importantes desde a perspectiva do ensino, sua ***definição***. Especificamente, trata das diversas versões que aparecem no contexto da Licenciatura. Através da análise de alguns textos universitários que poderiam-se considerar na bibliografia complementar de algumas disciplinas, o estudo leva à verificação da existência de três formas principais de definição que se descrevem e comentam: função como ***conjunto de pares ordenados***, função como ***grafo funcional*** e função como ***correspondência***.

Palavras-chave: Relação; Correspondência; Função

Introdução

Um estudo acerca do conceito de função compreenderia como questões conceituais a resolver: o ***significado do termo***, as ***formas de representar***, as ***propriedades*** de uma função e ***quais representações garantiriam quais propriedades***. Neste artigo estudamos o ***conceito de função*** em um de seus aspectos mais importantes desde a perspetiva do ensino, sua ***definição***, é dizer intentamos resolver a primeira das questões conceituais, o significado do termo. Nosso estudo se refere especificamente, as diversas versões de definição que aparecem no contexto da Licenciatura e se realiza através da análise de textos universitários que poderíamos considerar na bibliografia complementar de algumas disciplinas. Este estudo leva à verificação da existência de três formas principais de definição que descrevemos e comentamos na seguinte distribuição temática: na secção 1, função como ***conjunto de pares ordenados***, a secção 2 trata da função como ***grafo funcional*** e, finalmente, na secção 3 se trata da função como ***correspondência***.

1 Função como conjunto de pares ordenados:

Mac Lane, (MAC LANE, 1998), descreve algumas das ***ideias intuitivas*** das funções e da dependência funcional: ***fórmula, regra, gráfico (curva do plano), tabela de valores, dependência e sintaxe***. Logo de assinalar suas limitações, manifesta a necessidade de uma definição formalmente rigorosa do termo. A seguinte é uma definição dada por Mac Lane:

> **Definição**. Uma função f do conjunto X no conjunto Y é um conjunto $S \subset X \times Y$ de pares ordenados que para cada $x \in X$ contém exatamente um par ordenado $\langle x, y\rangle$ com o primeiro componente x. O segundo componente desse par é o valor da função f no argumento x, escrito $f(x)$. Chamamos X de domínio e Y o codomínio da função f. (MAC LANE, 1998, p.127-129)

Mac Lane diz que f é função do conjunto X no conjunto Y se

1. f é um subconjunto S de $X \times Y$.
2. para cada $x \in X$, S contém exatamente um par ordenado $\langle x, y \rangle$ com o primeiro componente x, equivalentemente, para cada $x \in X$, existe exatamente um $y \in Y$ talque S contém o par ordenado $\langle x, y \rangle$.

Observe-se que poderia (deveria) se escrever f em lugar de S. Para que usar dois símbolos distintos para denotar o mesmo objeto. Desta forma, f é função do conjunto X no conjunto Y ou, mais simplesmente, de X em Y, se

(i) $\quad f \subset X \times Y \quad$ e

(ii) $\quad (\forall\, x \in X)$: f contém exatamente um par ordenado com o primeiro componente x.

É fácil ver que a condição (ii) é equivalente com:

$$(ii)' \quad (\forall\, x \in X) : (\exists!\, y \in Y) : \langle x, y \rangle \in f$$

Observe-se também que não há menção alguma ao termo *relação*. Claro está que isto não invalida a definição dada.
Finalmente, no paragrafo citado a seguir, o autor, declara que esta definição é formal e que de maneira plausível mantem as intenções das descrições pre-formais de uma função.

> Isso fornece uma definição formal que, de maneiras plausíveis, corresponde à intenção das várias descrições pré-formais de uma função. Especificamente, ele fornece y, dependendo de x. Se alguém imaginar uma lista de todos os pares ordenados $\langle x_1, y_1 \rangle, \langle x_2, y_2 \rangle, \langle x_3, y_3 \rangle \ldots$ no conjunto S, essa lista será apenas a tabela (geralmente infinita) de valores da função. Se alguém visualizar os conjuntos X e Y como " espaços " de algum tipo, o produto cartesiano $X \times Y$ será um "espaço"(na Figura 1 um cilindro) e a função S será um subconjunto do produto que corta a cada subespaço "vertical" $\{x\} \times Y$ em exatamente um ponto. Portanto, S é uma curva nesse espaço do produto. Em vista desses exemplos, o conjunto S de pares ordenados é frequentemente chamado de grafo[a] da função - embora em nossa definição, a função seja seu grafo.
> (MAC LANE, 1998, p.127-129)
>
> [a]No texto original: ***graph***

Examinemos agora outra definição de função dentro desta linha de apresentação:

> Se X e Y são conjuntos, o produto cartesiano $X \times Y$ é o conjunto de todos os pares ordenados (x, y) de modo que $x \in X$ e $y \in Y$. Uma relação de X a Y é um subconjunto de $X \times Y$. (Se $Y = X$, falamos de uma relação em X.) Se $\mathcal{R}$ for uma relação de X a Y, iremos às vezes escrever $x\mathcal{R}y$ para significar que $(x, y) \in \mathcal{R}$. (FOLLAND,1999, p.3)

> Os tipos mais importantes de relações são as seguintes: [...]
> **Mapeamentos**. Um mapeamento $f : X \mapsto Y$ é uma relação $\mathcal{R}$ de X a Y com a propriedade que para cada $x \in X$ existe um único $y \in Y$ tal que $x\mathcal{R}y$, neste caso escrevamos $y = f(x)$. Às vezes, os mapeamentos são chamados **mapas** ou **funções**; geralmente reservamos o último nome para o caso em que Y é $\mathbb{C}$ ou algum subconjunto dele. (FOLLAND,1999, p.3)

A partir desta definição, podemos destacar que:

1. $[\mathcal{R}$ é uma relação de X a $Y] \overset{def}{\Leftrightarrow} \mathcal{R} \subset X \times Y$
2. $(x, y) \in \mathcal{R} \overset{not}{\Leftrightarrow} x\mathcal{R}y$
3. $f \subset X \times Y$ é uma função $\overset{def}{\Leftrightarrow} (\forall x \in X)\,(\exists\,!y \in Y) : (x, y) \in f$
4. $(x, y) \in f \overset{not}{\Leftrightarrow} y = f(x)$

De aqui, concluímos que as *funções* de X em Y são *relações* de X em Y e que nem toda relação de X em Y é uma função de X em Y. A expressão $f : X \mapsto Y$ é simplesmente uma notação para indicar que a relação f é uma função. A alusão a $\mathcal{R}$ na definição de função dada pelo autor é dispensável.

A seguir uma apresentação do conceito que, dentro desta forma de definir função, como conjunto de pares ordenados, parece ser mais coerente.

1. Pares ordenados

> **Par ordenado**
> Sejam x e y objetos quaisquer. O par ordenado (x, y) é definido como o conjunto $\{\{x\}, \{x, y\}\}$. É fácil verificar a propriedade fundamental dos pares ordenados: $(x, y) = (u, v)$ se e somente se $x = u$ e $y = v$. De maneira mais geral, podemos definir de forma semelhante uma n-upla ordenada $(x_1, \ldots x_n)$ com a propriedade $(x_1, \ldots x_n) = (y_1, \ldots y_n)$ se e somente se $x_1 = y_1, \ldots x_n = y_n$. (MADDOX, 1970 p.5)

Conforme a definição, temos

$$(x, y) \overset{def}{=} \{\{x\}, \{x, y\}\} \qquad \text{e} \qquad (x, y) = (u, v) \Leftrightarrow x = u \;\text{ e }\; y = v$$

Observe-se que um par ordenado é por definição um conjunto.

2. Relação. De posse do conceito de par ordenado, procede a definir o conceito de relação.

> **Relação**
> Uma relação ρ é definida como um conjunto de pares ordenados. Por exemplo, $\rho = \{(1, 2), (a, b)\}$ é uma relação.
>
> Notação equivalente para $(x, y) \in \rho$ é $x\rho y$. Assim, em nosso exemplo, podemos escrever $1\rho 2$ em vez de $(1, 2) \in \rho$. (MADDOX, 1970 p.5)

Pode-se observar que o conceito de *relação* é geral e não faz alusão a outro conjunto que não seja a relação mesma.

3. Produto cartesiano

> Um tipo importante de relação é o
> **Produto cartesiano**
> Sejam X e Y conjuntos. Então
>
> $$X \times Y = \{(x, y) \,|\, x \in X \; e \; y \in Y\}$$
>
> é chamado o produto cartesiano de X e Y. (MADDOX, 1970 p.5)

Sendo o produto cartesiano um conjunto de pares ordenados, em virtude da definição dada, é uma relação. De fato, conforme a definição dada, *qualquer subconjunto do produto cartesiano é* *uma relação.*

4. Domínio e Imagem[3] de uma Relação

> O *domínio* de uma relação é o conjunto de todas as primeiras coordenadas de seus membros. A *imagem* é o conjunto de todas as segundas coordenadas. (MADDOX, 1970, p.6)

Se $\mathcal{R}$ é uma relação, isto é, um conjunto de pares ordenados, então

$$x \in \text{Domínio de } \mathcal{R} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists\, z \in \mathcal{R} : \; z = (x, y)$$

Também

$$y \in \text{Imagem de } \mathcal{R} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists\, z \in \mathcal{R} : \; z = (x, y)$$

5. Função

De forma análoga ao de *relação*, a definição de função é geral. Ela não faz alusão a conjunto algum a não ser ele mesmo, pois, sendo uma relação, a *função é um conjunto de pares ordenados.*

> **Função**
> Uma função f é definida como uma relação, de modo que se $(x, y) \in f$ e $(x, z) \in f$ então $y = z$. Quatro outros termos para a função são mapa, mapeamento, operador e transformação
>
> Nosso conceito de função como um determinado conjunto de pares ordenados é o que alguns chamariam de grafo[a] de uma função. pois eles definem uma função como uma 'regra' ou algo assim. Na ocasião, usaremos o termo 'grafo da função', quando isso parecer mais expressivo. No entanto, para nós, uma função e seu grafo são exatamente a mesma coisa. (MADDOX, 1970 p.6)
>
> [a]No texto original ***graph***

Segundo a definição, uma *relação f é uma função se, e somente se, cumpre*

$$(x.y) \in f \;\text{ e }\; (x, z) \in f \;\Rightarrow\; y = z$$

6. Função de X em Y

> Se f é uma função e $(x, y) \in f$, escrevemos $y = f(x)$, que é a notação convencional para y como função de x. Dizemos que y é o valor de f em x ou que y é a imagem de x pela função f.
> A notação
> $$f : X \mapsto Y$$
> atualmente é amplamente utilizada em matemática. É interpretado como 'f é uma função do conjunto X no conjunto Y'. O significado de $f : X \mapsto Y$ é que X é o domínio de f e que a imagem de f é um subconjunto de Y, não necessariamente todo Y. (MADDOX, 1970 p.7)

Assim, ***uma "função de X em Y" é uma "função" com Domínio X e Imagem contida em Y***

[3]Traduzimos o termo *range* como *imagem*

2 Função como Grafo de uma relação funcional

Antes de iniciar a exposição desta forma de definir função, deve-se fazer algumas observações relativas ao significado dos termos usados.

Relação: Define-se *relação* $\mathcal{R}$ entre elementos x de um conjunto X e elementos y de um conjunto Y uma ***propriedade definida no conjunto*** $X \times Y$ ***característica de um subconjunto*** G ***de*** $X \times Y$. Isto enquadra-se na definição mais geral seguinte:

Propriedade definida em um conjunto: Seja E um conjunto e A uma parte de E. Chama-se propriedade característica de A todo ***critério*** que permite decidir, para todo x de E, entre as duas proposições "$x \in A, \quad x \notin A$". Assim, se p é uma propriedade característica do conjunto $A \subset E$ e $x \in A$, então a proposição "x cumpre a propriedade p" é verdadeira e escreve-se $p(x)$. Logo $x \in A \Leftrightarrow p(x)$ e $A = \{x \in E \,|\, p(x)\}$.

Isto permite estabelecer o significado do termo ***grafo*** como sendo o conjunto $G \subset X \times Y$ para o qual $\mathcal{R}$ é uma propriedade característica. Assim para $(x, y) \in X \times Y$, a proposição $\mathcal{R}(x, y)$ é equivalente a $(x, y) \in G$ e $G = \{(x, y) \in X \times Y \,|\, \mathcal{R}(x, y)\}$. Como pode se ver, neste contexto, o termo grafo não tem o sentido intuitivo de ***gráfico*** como ***curva representativa*** de uma relação.

Segue a definição dada por Dieudonne:

Grafo de uma relação funcional

> **4. Mapeamentos**[a] Sejam X, Y dois conjuntos, $R(x, y)$ uma relação entre $x \in X$ e $y \in Y$; diz-se que R é *funcional em* y*, se, para cada* $x \in X$*, houver um e apenas um,* $y \in Y$, de modo que $R(x, y)$ é verdadeiro. O grafo dessa relação é chamado de *grafo funcional* em $X \times Y$; esse subconjunto F de $X \times Y$ é, portanto, caracterizado pelo fato de que, para cada $x \in X$, há um e apenas um $y \in Y$ de modo que $(x, y) \in F$; esse elemento y é chamado de *valor de* F *em* x e é denotado por $F(x)$. (DIEUDONNE, 1960, p.5)
>
> [a]Na versão traduzida ao espanhol: ***Aplicações***. (DIEUDONNE, 1966, p.15)

Função é um grafo funcional

> Um grafo funcional em $X \times Y$ também é chamado de *mapeamento de* X *em* Y ou uma função *definida em* X*, assumindo seus valores em* Y. É habitual, na linguagem, falar de um mapeamento e de um grafo funcional como se fossem dois tipos diferentes de objetos em correspondência um a um, e falar, portanto, do "grafo do mapeamento", mas isso é uma mera distinção psicológica (que corresponde a se olhar para F "geometricamente"ou "analiticamente"). (DIEUDONNE, 1960, p.5)

Distinção entre a função e um de seus valores: $F \neq F(x),\ F \in \mathcal{P}(X \times Y),\ F(x) \in Y.$

> Em qualquer caso, é fundamental, na matemática moderna, acostumar-se a considerar um mapeamento como um *objeto simples*, apenas como um ponto ou número, e fazer uma distinção clara entre o mapeamento F e qualquer um de seus valores $F(x)$; o primeiro é um elemento de $\mathcal{P}(X \times Y)$, o segundo elemento de Y, tem-se $F = \{(x, y) \in X \times Y \,|\, y = F(x)\}$. Os subconjuntos de $X \times Y$, que possuem a propriedade de serem grafos funcionais, formam um subconjunto de $\mathcal{P}(X \times Y)$, é chamado de *conjunto de mapeamentos de* X *em* Y e escrito Y^X ou $\mathcal{F}(X, Y)$. (DIEUDONNE, 1960, p.5)

Nesta definição podemos destacar os seguintes aspectos:

1. Dada uma *relação* R entre $x \in X$ e $y \in Y$.

$$R \ \textit{é funcional em} \ y \ \Leftrightarrow \ (\forall x \in X)\,(\exists!\, y \in Y) \ : \ R(x, y)$$

2. Seja $F = \{(x, y) \in X \times Y \ : \ R(x, y)\} \subset X \times Y$. F diz-se *grafo funcional em* $X \times Y$ é chamado também *aplicação de* X *em* Y ou *função definida em* X *tomando valores em* Y.

3. F é um subconjunto de $X \times Y$ caracterizado por $(\forall x \in X)\,(\exists\,!\, y \in Y) \ : \ (x, y) \in F$.

4. $R(x, y) \ \overset{def}{\Leftrightarrow} \ (x, y) \in F \ \overset{not}{\Leftrightarrow} \ y = F(x) \equiv y$ é chamado o valor de F em x.

Assim, segundo Dieudonne, ***uma função*** F ***é o grafo de uma relação*** $\mathcal{R}$ ***entre*** $x \in X$ ***e*** $y \in Y$ ***funcional em*** y.
Pode-se determinar uma função pela construção dos valares funcionais:

> Se, para cada $x \in X$, construímos um objeto $T(x)$ que é um elemento de Y, a relação $y = T(x)$ é funcional em y; o mapeamento correspondente é escrito $x \mapsto T(x)$. Esta é, obviamente, a definição usual de um mapeamento; ele coincide essencialmente com o dado acima, pois se F é um gráfico funcional, é o mapeamento $x \mapsto F(x)$. (DIEUDONNE, 1960, p.6)

Sendo a função um conjunto, pode-se enunciar a igualdade de funções pela igualdade dos valores que assumem para cada valor do argumento.

> Da definição de igualdade de conjuntos (1.1) segue que a relação $F = G$ entre dois mapeamentos de X em Y é equivalente à relação "$F(x) = G(x)$ para todo $x \in X$."(DIEUDONNE, 1960, p.6)

Observe-se que, segundo a definição dada por Dieudonne, uma função é também um conjunto de pares ordenados. Porém o enfoque é diferente.

3 Função como correspondência

Um dos livros de uso frequente nos cursos de graduação é o da coleção Schaum *Teoria de conjuntos e Temas Afins.* Nele encontramos a seguinte definição de função:

> Se a cada elemento de um conjunto A, de alguma forma, se faz corresponder um elemento único de um conjunto B, diz-se que essa corespondência é uma *função.* Denotando essa correspondência por f, escrevemos
>
> $$f : A \mapsto B$$
>
> que se lê "f é uma função de A em B". O conjunto A é chamado *domínio de definição* da função f, e B é chamado *codomínio* de f. Por outro lado, se $a \in A$, o elemento de B que corresponde a a é chamado de imagem de a e é indicado por
>
> $$f(a)$$
>
> que lê "f de a". (LIPSCHUTZ, 1972)

Pode-se observar nesta definição a presença do termo *correspondência.* O autor afirma que **essa correspondência é uma função**. Assim, *uma função é uma correspondência.* O termo

correspondência que define o objeto não é previamente definido. Isto, deixa a definição dada na informalidade.
A seguinte é uma definição de correspondência que faz uso do termo "comparação". Estabelece a formação do conceito a partir de um processo de comparação dos elementos de um conjunto com os elementos de outro conjunto.

> 1-4 CORRESPONDÊNCIAS
>
> **a) Definição de correspondência**.
>
> Vamos examinar dois conjuntos X e Y. Os elementos desses conjuntos podem ser comparados entre si de alguma maneira, formando pares (x, y). Se o método dessa comparação for determinado, para cada elemento $x \in X$ o elemento $y \in Y$ com o qual o elemento x é comparado é indicado, diz-se que entre os conjuntos X e Y a correspondência foi estabelecida, portanto, não é absolutamente necessário que todos os elementos dos conjuntos X e Y participem da comparação. (KORSHUNOV, 1976, p.44)

Aqui se descreve o processo de como se estabelece uma correspondência, mas ainda não diz o que é uma correspondência.

> Para representar uma correspondência, é necessário destacar:
>
> 1) o conjunto X cujos elementos são comparados com os elementos do outro conjunto;
>
> 2) o conjunto Y cujos elementos são comparados com os do primeiro conjunto;
>
> 3) o conjunto $Q \subset X \times Y$ que define a lei de acordo com a qual a correspondência é aplicada, ou seja, que lista todos os pares (x, y) que participam da comparação. Assim, o mapeamento designado por q representa a tríade de conjuntos
>
> $$q = (X, Y, Q) \qquad (1\text{-}49)$$
>
> em que $Q \subset X \times Y$ Nesta expressão, o primeiro componente X é chamado de domínio de partida da correspondência, o segundo componente Y, o domínio de chegada da correspondência e o terceiro componente Q é o grafo[a] da correspondência. (KORSHUNOV, 1976, p.45)
>
> [a]No texto traduzido ao espanhol:***gráfica***

Segue sem definir correspondência e assinala que *para representar uma correspondência* é necessário destacar três conjuntos. Assim, se procede a representar um objeto ainda não definido. Diz-se, que *a correspondência q representa-se pela tríade* (X, Y, Q). Talvez deveria se dizer que *a correspondência q é a tríade* (X, Y, Q) definindo assim o termo correspondência. Anuncia que o termo grafo será explicado ao estudar um tipo particular de correspondência, a função.

> O termo "grafo" será explicado em mais detalhes ao estudar o tipo específico de correspondência chamado função

Assim, uma *função* é uma *correspondência.* Assinala que existem outros dois conjuntos indissoluvelmente ligados com a correspondência. Define logo o *domínio de definição*, Pr_1Q, e o *domínio de valores*, Pr_2Q, da correspondência.

> Além dos três conjuntos examinados X, Y, Q, os dois conjuntos a seguir também estão inseparavelmente relacionados a cada correspondência: o conjunto Pr_1Q denominado domínio de definição de correspondência, formado pelos elementos do conjunto X que entram em comparação e o conjunto Pr_2Q chamado o domínio de valores da correspondência, composto pelos elementos do conjunto Y que são comparados. (KORSHUNOV, 1976, p.45)

As definições dadas podem-se exprimir da forma seguinte:

$$x \in Pr_1Q \quad \Leftrightarrow \quad (\exists\, z \in Q): \ z = (x, y)$$
$$y \in Pr_2Q \quad \Leftrightarrow \quad (\exists\, z \in Q): \ z = (x, y)$$

A seguir se define *reflexo* como uma *correspondência* e, a sua vez, *função*, como um *reflexo.*

> 1-5 REFLEXOS E FUNÇÕES
>
> **a) Reflexos e suas propriedades**
>
> Seja X e Y conjunto, sendo $\Gamma \subset X \times Y$ e $Pr_1\Gamma = X$. A tríade dos conjuntos (X, Y, Γ) define uma certa correspondência que possui a propriedade de que seu domínio de definição $Pr_1\Gamma$ coincide com o conjunto de partida, ou seja, com X e, portanto, essa correspondência é definida em todas as partes em X. Em outras palavras, para cada $x \in X$ existe um $y \in Y$ tal que $(x, y) \in \Gamma$. Essa correspondência definida em todo lugar é chamada *reflexo* de X em Y e é expressa por
>
> $$\Gamma : X \mapsto Y$$
>
> (KORSHUNOV, 1976, p.47)

Segundo a definição um *reflexo* é uma *correspondência* cujo domínio de definição é todo o conjunto de partida. A seguir a definição de *função*:

> **c) Função, funcional e operador**
>
> Vamos examinar um certo reflexo
>
> $$f : X \mapsto Y \qquad (1-72)$$
>
> Esse reflexo é chamado *função* se for unívoco, ou seja, para qualquer par $(x_1, y_1) \in f$ e $(x_2, y_2) \in f$ de $x_2 = x_1$, segue-se que $y_2 = y_1$.(KORSHUNOV, 1976, p.51)

Conforme isto, uma *função* é um *reflexo unívoco.* Assim, uma *função* é uma *correspondência univoca cujo conjunto de definição é o conjunto de partida.*

$$(X, Y, f) \text{ é uma função } \Leftrightarrow (i)\ Pr_1 f = X \text{ e } (ii)\ [(x, y_1) \in f \ e \ (x, y_2) \in f \Rightarrow y_2 = y_1]$$

Esta ausência de uma definição previa de *correspondência*, que achamos ao inicio, também é preenchida por Queysanne:

> **10. Correspondência entre elementos de um conjunto A e elementos de um conjunto B**
>
> a) Seja R uma relação entre x elemento de A e y elemento de B, seja G seu grafo; chama-se **correspondência** entre A y B o *triplete* (A, B, G). A é o *conjunto de saída*, B o *conjunto de chegada*, G é o *grafo* da correspondência. (QUEYSANNE, 1964, p.29)

De pose da definição de *correspondência*, Queysanne, passa a caracterizar uma função como sendo uma correspondência enunciando a seguinte definição de *correspondência funcional*:

> c) Uma correspondêcia (A, B, G) é *funcional* em y se, qualquer que seja x de A lhe corresponde um elemento y de B e somente um pela correspondência. (QUEYSANNE, 1968, p.30)

Finalmente, a definição de função:

> **Noção de aplicação (ou função)**
> Dados dois conjuntos A e B, uma **aplicação** f de A em B é uma correspondência entre um elemento de A e um elemento de B, funcional para este elemento de B. (QUEYSANNE, 1964, p.31)

Desta maneira, ***função é uma correspondência funcional***. A seguir se dá uma explicação mais extensa da definição dada:

> Em outras palavras:
> **Qualquer que seja** x elemento de A, a aplicação f faz corresponder a x **um único elemento** y de B. Dizemos que f **aplica** A em B ou f é um **aplicação** de A em B. (QUEYSANNE, 1964, p.31)

Agora um pouco de notação e nomenclatura:

> A palavra *função* é sinônimo da palavra aplicação; dizemos que a função f é definida em A e toma seus valores em B.
> A é o conjunto de saida ou o conjunto de definição de f, B o conjunto de chegada de f.

Queysanne comenta o costume do uso do termo função para referir-se à aquelas que possuem valores numéricos.

> 1. É habitual usar a palavra "função" especialmente quando o conjunto de chegada é um conjunto de "números", ou seja, uma parte de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, mas esta regra não é absoluta.(QUEYSANNE, 1964, p.31)

Define logo o *argumento* e o *valor* da função:

> O elemento arbitrário x de A é a **variável** ou *argumento* da função. O elemento único y de B que corresponde a x é denotado como $f(x)$; é o *valor* da função em x ou **a imagem** de x por f se lê "f de x". (QUEYSANNE, 1964, p.31)

Deve-se lembrar o que é o *grafo* da função:

> O grafo da aplicação ou função f é a parte de $A \times B$ definida por:
>
> $$G = \{(x, y) \ emA \times B \,|\, y = f(x)\}.$$

> **Notações**. Escrevemos:
>
> $$f : A \mapsto B \text{ ou } A \overset{f}{\mapsto} B$$
>
> que lemos: "f aplica A em B". Também escrevemos:
>
> $$(\forall x \in A)\ [x \mapsto f(x) \in B]$$
>
> ou mais simplesmente:
>
> $$x \mapsto f(x)$$
>
> quando nenhuma confusão deve ser temida; lemos "x dá $f(x)$ por f"ou "x tem imagem $f(x)$ por f"ou "f envia x a $f(x)$ ".
> Em vez de $f(x)$, escrevemos em alguns casos f_x que lemos "f subíndice x"; $[\cdots]$. (QUEYSANNE, 1964, p.31-32)

O seguinte paragrafo ressalta o fato de que uma função f de A em B, sendo uma correspondência, é um triplete (A, B, G), isto é, $f = (A, B, G)$. Isto permite estabelecer a igualdade de funções e, consequentemente, determinar quando duas funções são diferentes:

> Uma aplicação é, portanto, uma terna ordenada! $f = (A, B, G)$, duas aplicações $f = (A, B, G)$ e $g = (A', B', G')$ são, portanto, iguais se e somente se:
>
> $$A = A', \quad B = B', \quad G = G'$$
>
> isto é, se eles tiverem o mesmo conjunto de partida, o mesmo conjunto de chegada e se:
>
> $$(\forall x \in A) \quad f(x) = g(x)$$
>
> então escrevemos: $f = g$. (QUEYSANNE, 1964, p.32)

Assim, por exemplo, as funções $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R};\ f(x) = \sin x$ e $g : \mathbb{R} \mapsto [-1, 1];\ g(x) = \sin x$, são funções diferentes.

> Elas não serão iguais ($f \neq g$) se pelo menos uma dessas condições não for atendida. Em particular, se $A = A'$ e $B = B'$, $f \neq g$ é equivalentes a:
>
> $$(\exists x \in A) \quad f(x) \neq g(x).$$
>
> O conjunto de todos as aplicações de A em B é um novo conjunto denominado $\mathcal{F}(A, B)$. (QUEYSANNE, 1964, p.32)

A seguinte observação adverte acerca de um frequente abuso de linguagem que é fonte de múltiplos erros.

> OBSERVAÇÃO. Se nenhuma confusão deve ser temida, podemos dizer "a aplicação (ou função) $f : x \mapsto f(x)$"; por outro lado, a expressão "seja a função $f(x)$" é um **grave abuso de linguagem**, de fato:
>
> $$f(x) \in B \quad \text{e} \quad f \in \mathcal{F}(A, B).$$
>
> *Esta confusão entre o valor de uma função em x e a função f infelizmente é muito frequente, é a fonte de muitos erros.*
> Portanto, não devemos dizer a "função $\cos x$", mas:
> - a função $x \mapsto \cos x$
> - ou a função cosseno. (QUEYSANNE, 1964, p.32)

Finalmente, todo o anterior se resume na seguinte definição:

> **4. Funções**
> DEFINIÇÃO 9 .- Dizemos que um grafo F é um grafo funcional, se, para todos os x, houver no máximo um objeto correspondente a x por F (I, p. 40) Dizemos que uma correspondência $f = (F, A, B)$ é uma função se o grafo F for um grafo funcional e, se o conjunto de partida A for igual ao conjunto de definição pr_1F (BOURBAKI, 1970, E II 13, §3 nº 5.)

Assim,

$$f = (F, A, B) \text{ é uma função } \Leftrightarrow (i)\, F \text{ é um grafo funcional e } (ii)\, Pr_1F = A$$

> Em outras palavras, uma correspondência $f = (F, A, B)$ é uma função se, para todos os x pertencentes ao conjunto de partida A de f, a relação $(x, y) \in F$ é funcional em y (I, p. 41); (BOURBAKI, 1970, E II 13, §3 nº 5.)

Assim, se $f = (F, A, B)$ é uma correspondência,

$$f \text{ é uma função } \Leftrightarrow (\forall x \in A): \text{ a relação } (x, y) \in F \text{ é funcional em } y$$

equivalentemente,

$$f \text{ é uma função } \Leftrightarrow (\forall x \in A)\,(\exists\,!\, y \in B): (x, y) \in F$$

> o objeto único correspondente a x por f é chamado de valor de f para o elemento x de A e é designado por $f(x)$ ou f_x (ou $F(x)$ ou F_x). (BOURBAKI, 1970, E II 13, §3 nº 5.)

Um dos autores mais prestigiosos e recomendados no ensino superior de matemática, é sem duvida alguma, o Professor Elon Lages Lima, registremos a definição de função dada em um de seus livros:

> **§3 Funções**
> Uma função $f : A \mapsto B$ consta de três partes: um conjunto A, chamado o *domínio* da função (ou conjunto onde a função é definida), um conjunto B, chamado o *contradomínio* da função, ou o conjunto onde a função toma valores, e uma regra que permite associar, de modo bem determinado, a cada elemento $x \in A$, um único elemento $f(x) \in B$, chamado o valor que a função assume em x (ou no ponto x).
> Usa-se a notação $x \mapsto f(x)$ para indicar que f faz corresponder a x o valor $f(x)$. $[\cdots]$
> O gráfico de uma função $f : A \mapsto B$ è $[\cdots]$:
>
> $$G(f) = \{(x, y) \in A \times B;\, y = f(x)\}$$
>
> (LIMA, 2004, pp.13-14).

A definição dada acima, não diz o que é uma função, mas fala que tem três partes, podemos supor que se trata de uma terna ordenada. Agora, se a regra faz ***corresponder*** de modo bem determinado a cada elemento de A o elemento de B, ela determina o subconjunto $G(f)$ de $A \times B$ que menciona pouco depois. Assim, podemos inferir que de forma implícita trata-se da correspondência $(A, B, G(f))$. Isto coloca a definição na corrente "bourbakiana" do conceito. Nesta linha, temos também a definição dada pelo prestigioso Professor Luiz Adauto Medeiros,

> Define-se (conforme Dirichlet (1887)) como função $f : X \mapsto Y$, um objeto constituído por dois conjuntos - X o domínio da função, Y o conjunto contra-domínio da função - e uma regra geral que a cada $x \in X$ associa um único $y \in Y$. Denota-se uma função f por
>
> $$f : X \mapsto Y; \, y = f(x) \text{ ou } x \mapsto f(x)$$
>
> (MEDEIROS, 2005, p.18)

Referências

BOURBAKI, N. **Eléments de Mathématique Livre I Théorie des Ensembles Fascicule de Résultants**. Hermann: Paris, 1958.

BOURBAKI, N. **Eléments de Mathématique Livre I Théorie des Ensembles**. DIFUSSION C.C.L.S: Paris, 1970.

DIEUDONNE, J. **Fundamentos de Análisis Moderno**. Reverté : Espanha, 1966.

DIEUDONNE, J. **Foundation of Modern Analysis**. Academic Press: New York and London, 1960.

FOLLAND, G. **Real Analysis**. 2^a edição. John Wiley & Sons, Inc.: USA,1999.

KORSHUNOV, M. **Fundamentos Matemáticos de la Cibernética**. Editorial MIR: Moscú, 1976.

LIMA, E.L. **Curso de análise** v.1. 11 ed. Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (Projeto Euclides): Rio de Janeiro, 2004.

LIPSCHUTZ, Seymour, Teoria dos Conjuntos, Coleção Schawn, Editora McGraw-Hill: São Paulo, 1972.

MAC LANE, S. **Mathematics Form and Function**. Sringer-Verlag New York Inc: USA, 1986.

MADDOX, I.J. **Elements of functional analysis**. Cambridge University Press: New York, 1970.

MEDEIROS, L.A. et all. **Lições de Análise Matemática**. Universidade Federal de Rio de Janeiro, Instituto de Matemática: Rio de Janeiro, 2005.

QUEYSANNE, M. **Algèbre**. Collection U, Série Mathématiques dirigée par André Revuz. Armand Colin: Paris, 1964.

QUEYSANNE, M. **Álgebra Básica**. Primera Edición. Vicens Vives: Barcelona, 1971.

O teorema de Ascoli-Arzelá e uma aplicação no estudo de equações diferenciais ordinárias

Eduardo Ghisi[4]
Universidade Estadual do Oeste do Paraná
eduardoghisi66@outlook.com

André Vicente
Universidade Estadual do Oeste do Paraná
andre.vicente@unioeste.br

Resumo: Neste trabalho apresentamos um teorema que garante a existência de solução para uma equação diferencial ordinária. Tal resultado é conhecido na literatura por Teorema de Peano. A prova é feita usando o Teorema de Ascoli-Arzelá.

Palavras-chave: Teorema de Ascoli-Arzelá; Teorema de Peano; equações diferenciais ordinárias.

1 Introdução

Em Análise Matemática é usual nos depararmos com problemas que envolvem a busca por conjuntos compactos. Um espaço bastante utilizado em problemas envolvendo o estudo de equações diferenciais é o espaço formado pelas funções contínuas $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, denotado por $C([a, b])$. Um resultado clássico que nos fornece informações sobre questões envolvendo compacidade neste conjunto é o Teorema de Ascoli-Arzelá. Sua demonstração pode ser encontrada em Kolmogorov e Fomin (1982).

Neste trabalho empregaremos o Teorema de Ascoli-Arzelá para provar a existência de solução para um problema envolvendo uma equação diferencial ordinária. O Teorema provado é conhecido na literatura por Teorema de Peano. Tal teorema é muito importante no estudo de equações diferencias ordinárias, pois abrange uma classe ampla de não linearidades. A prova apresentada aqui pode ser encontrada em Kolmogorov e Fomin (1982), Coddington e Levinson (1987) ou Lima (1976).

Assim, comecemos estabelecendo o problema que será estudado. Para isso, seja D um conjunto aberto e conexo de $\mathbb{R}^2$. Considere $f : D \to \mathbb{R}$ uma função contínua. O objetivo deste trabalho é encontrar uma função $\varphi : I \to \mathbb{R}$, onde I é um intervalo contido em $\mathbb{R}$ com $t_0 \in I$, tal que φ seja solução da seguinte equação diferencial ordinária

$$x' = f(x, t), \tag{1}$$

$$x(t_0) = \xi_0, \tag{2}$$

onde ξ_0 é um número real conhecido.

[4]Acadêmico do Curso de Matemática - Unioeste/Campus de Cascavel.

Conforme Coddington e Levinson (1987), é possível provar que φ é solução de (1)–(2) se, e somente se, φ satisfaz a seguinte equação integral

$$\varphi(t) = \xi_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\, ds, \tag{3}$$

e é esta caracterização de solução para (1)–(2) que usaremos para provar o resultado principal.

O trabalho está organizado da seguinte forma: na seção 2 apresentamos o Teorema de Ascoli-Arzelá e um resultado preliminar que é necessário para a prova do resultado principal. Na seção 3 provamos o Teorema de Peano usando a caracterização (3) para uma solução de (1)–(2).

2 Resultados preliminares

Nesta seção apresentamos algumas definições, o Teorema de Ascoli-Arzelá e também um resultado preliminar que será usado na prova do Teorema de Peano.

Um conjunto F de funções $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ chama-se equilimitado se existir um número $c > 0$ tal que

$$|f(x)| \leq c,$$

para todo $x \in [a, b]$ e para qualquer função $f \in F$. O conjunto de funções F chama-se equicontínuo se, dado qualquer $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$x_1, x_2 \in [a, b], |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon,$$

para qualquer $f \in F$.

Agora estamos aptos a enunciar o Teorema de Ascoli-Arzelá:

Teorema 1. *Seja F um conjunto infinito, equilimitado e equicontínuo de funções $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Então F contém uma sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, a qual é uniformemente convergente em $[a, b]$.*

Prova: Ver Kolmogorov e Fomin (1982), Coddington e Levinson (1987) ou Lima (1976).

Seja $f : R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função contínua, onde

$$R = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2;\ |t - t_0| \leq a \text{ e } |x - \xi_0| \leq b\},$$

aqui a e b são números reais positivos fixos e $(t_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^2$. Temos que f é limitada em R, portanto existe $M > 0$ tal que

$$|f(t, x)| \leq M,$$

para todo $(x, t) \in R$. Seja

$$\alpha = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}.$$

Se $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, chamamos de uma solução ε-aproximada de (1)–(2) a uma função contínua $\varphi : I \to \mathbb{R}$ tal que

a) $(t, \varphi(t)) \in D$;

b) φ é uma função continuamente derivável por partes em I;

c) $|\varphi'(t) - f(t, \varphi(t))| < \varepsilon$, para todo $t \in I \setminus S$, onde S é o conjunto dos pontos onde φ' é descontínua.

Observando as notações acima, temos o seguinte resultado

Teorema 2. *Seja $f : R \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Dado $\varepsilon > 0$, existe uma função $\varphi_\varepsilon : [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \to \mathbb{R}$ a qual é uma solução ε-aproximada de (1)–(2) e tal que $\varphi(t_0) = \xi_0$. Além disso, ocorre*

$$|\varphi_\varepsilon(t) - \varphi_\varepsilon(s)| \leq M|t - s|,$$

para todo $t, s \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$.

Prova: Ver Coddington e Levinson (1987).

3 Resultado principal

Como descrito na introdução, nesta seção provaremos o resultado principal deste trabalho.

Teorema 3. *Seja $f : R \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então existe uma função continuamente derivável $\varphi : [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \to \mathbb{R}$ solução de (1)–(2).*

Prova: Considere a sequência $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$. Pelo Teorema 2, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe uma função $\varphi_n : [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \to \mathbb{R}$ a qual é uma solução $\frac{1}{n}$-aproximada de (1)–(2). Além disso, ocorre

$$|\varphi_n(t) - \varphi_n(s)| \leq M|t - s|, \tag{4}$$

para todo $t, s \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ e para todo $n \in \mathbb{N}$. Tomando $s = t_0$ em (4), obtemos que

$$|\varphi_n(t)| \leq |\varphi_n(t) - \varphi_n(t_0)| + |\varphi_n(t_0)| \leq M\alpha + |\xi_0| \leq b + |\xi_0|,$$

para todo $t, s \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ e para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, a sequência $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é equilimitada.

A desigualdade (4) também permite provarmos que a sequência $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é equicontínua. De fato, sejam $\varepsilon > 0$ e $n \in \mathbb{N}$ quaisquer. Defina $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$. Assim,

$$|t - s| < \delta \Rightarrow |\varphi_n(t) - \varphi_n(s)| \leq M|t - s| < M\delta < \varepsilon,$$

como $n \in \mathbb{N}$ é arbitrário, temos que $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é equilimitada, como queríamos.

Assim, pelo Teorema de Ascoli-Arzelá, existe uma subsequência $(\varphi_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e uma função $\varphi : [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \to \mathbb{R}$ tal que

$$\varphi_{n_k} \to \varphi \quad \text{uniformemente}, \tag{5}$$

quando $k \to \infty$. Como cada φ_{n_k} é contínua, temos que φ também é contínua.

Por outro lado, do Teorema Fundamental do Cálculo, temos que

$$\varphi_{n_k}(t) = \varphi_{n_k}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \varphi'_{n_k}(s)\, ds. \tag{6}$$

Daqui,

$$\varphi_{n_k}(t) = \xi_0 + \int_{t_0}^{t} \left[f(s, \varphi_{n_k}(s)) + \varphi'_{n_k}(s) - f(s, \varphi_{n_k}(s)) \right]\, ds. \tag{7}$$

Sendo φ_{n_k} uma solução $\frac{1}{n_k}$-aproximada de (1)–(2), temos que

$$\left| \int_{t_0}^{t} \left[\varphi'_{n_k}(s) - f(s, \varphi_{n_k}(s)) \right]\, ds \right| \leq \frac{1}{n_k} \int_{t_0}^{t} ds \leq \frac{\alpha}{n_k} \to 0, \tag{8}$$

quando $k \to \infty$. Portanto,

$$\lim_{k\to\infty} \int_{t_0}^{t} \left[\varphi'_{n_k}(s) - f(s, \varphi_{n_k}(s)) \right]\, ds = 0. \tag{9}$$

Além disso, como f é uniformemente contínua e a convergência (5) é uniforme, temos que

$$\lim_{k\to\infty} \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_{n_k}(s))\, ds = \int_{t_0}^{t} \lim_{k\to\infty} f(s, \varphi_{n_k}(s))\, ds = \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\, ds. \tag{10}$$

Tomando o limite, quando $k \to \infty$, de (7)–(10) concluímos que

$$\varphi(t) = \xi_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\, ds, \tag{11}$$

para todo $t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$. Portanto, φ satisfaz (3), consequentemente é uma solução de (1)–(2).

$\square$

Referências

KOLMOGOROV, A. N.; FOMIN, S. V. Elementos da teoria das funções e de Análise Funcional. URSS: MIR, 1982. 535 p. v. 1.

LIMA, E. L. Curso de Análise. BRASIL: IMPA, 1976. 431 p. v. 1.

CODDINGTON, E. A.; LEVINSON, N. Theory of ordinary differential equations. New Delhi: McGraw-Hill Inc, 1987. 429 p. v. 1.